Нижние оценки приближений алгебраическими многочленами

30 ноября 2019 г.

В теории приближений изучается возможность приближения сложных объектов более простыми. Погрешность приближения (назовём её E) редко удаётся найти точно, поэтому задача разбивается на две: получения верхних оценок: $E \leqslant \ldots$, и нижних оценок: $E \geqslant \ldots$. Для верхних оценок, как правило, применяются конкретные методы аппроксимации: ряды Фурье, интерполяция, и т.д. Эту часть теории приближения можно назвать *конструктивной теорией приближения.* В этой и ближайших лекциях мы поговорим о *нижних оценках*, когда мы доказываем, что объект является в том или ином смысле большим, сложным, и не может быть слишком хорошо приближен. Конечно, это более теоретическая задача, однако нижние оценки показывают предел наших возможностей и позволяют заявлять об оптимальности тех или иных методов.

Пусть X — нормированное пространство, $x \in X$, $M \subset X$. Через $E(x, M)_X$ обозначается расстояние от x до M, то есть $\inf_{y \in M} \|x-y\|$. Для множества $K \subset X$ через $E(K, M)_X$ обозначаем *уклонение от K до M*, или, другими словами, *величину наилучшего приближения множества K множеством M*:

$$E(K, M)_X := \sup_{x \in X} E(x, M)_X = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X.$$

Если из контекста ясно, о каком X идёт речь, не пишем его: $E(K, M)$.

На этой лекции будем работать в пространстве непрерывных функций $X = C[a, b]$; норма $\|\cdot\|$ обозначает норму в этом пространстве. Через $\mathcal{P}_n$ обозначаем множество вещественных алгебраических многочленов степени не выше n.

Напомним классическую теорему теории приближений.

Теорема 1 (Weierstrass, 1885). *Для любой $f \in C[a,b]$ имеем*

$$E(f, \mathcal{P}_n)_{C[a,b]} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Как быстро должна стремиться к нулю последовательность $E(f, \mathcal{P}_n)$? Несложное рассуждение показывает, что сходимость может быть сколь угодно медленной.

Утверждение 1. *Для любой последовательности $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ существует $f \in C[a,b]$, такая что $E(f, \mathcal{P}_n) \geqslant \alpha_n$.*

Доказательство. В качестве "кирпичиков" для построения функции f используем многочлены Чебышёва: $Ч_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Известно, что $\|Ч_n\| = 1$ и $E(Ч_n, \mathcal{P}_{n-1}) = 1$.

Выберем подпоследовательность номеров n_k, так что $\alpha_n < \frac{1}{2}3^{-k-1}$ при $n \geqslant n_k$. Положим

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} Ч_{n_k}.$$

Оценим $E(f, \mathcal{P}_n)$; пусть $n_{j-1} \leqslant n < n_j$. Ряд для f разбивается на основное слагаемое $\sum_{k=1}^{j}$ и "хвост" $\sum_{k>j}$, норма которого не превосходит $\sum_{k>j} 3^{-k} = \frac{1}{2}3^{-j}$. Следовательно, в силу того, что $n < n_j$, получаем

$$E(f, \mathcal{P}_n) \geqslant E(\sum_{k=1}^{j} 3^{-k} Ч_{n_k}, \mathcal{P}_n) - \frac{1}{2}3^{-j} = 3^{j} - \frac{1}{2}3^{-j} = \frac{1}{2}3^{-j}.$$

В силу выбора $\{n_k\}$, последняя величина не меньше α_n. (Индексы индексы $n < n_1$ остались не рассмотрены; поправьте f, чтобы охватить и их.) $\square$

Имеется значительно более тонкая теорема; приводим её без доказательства.

Теорема 2 (С.Н. Бернштейн, 1954). *Пусть последовательность α_n стремится к нулю и невозрастает. Тогда существует функция $f \in C[a,b]$, такая что $E(f, \mathcal{P}_n) = \alpha_n$ при всех n.*

Отметим современный результат С.В. Конягина (2014).

Теорема 3. *Пусть X — произвольное бесконеномерное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ — произвольная система строго вложенных подпространств, числовая последовательность α_n невозрастает и $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда найдётся элемент $x \in X$, для которого $\alpha_n \leqslant E(x, Y_n)_X \leqslant 8\alpha_n$ при $n = 1, 2, \dots$.*

Альтернанс Валле Пуссена. Напомним определение. Линейное n-мерное подпространство $\Phi \subset C[a,b]$ называется *чебышёвским*, если любая функция $\varphi \in \Phi$ имеет не более $n-1$ нуля на $[a,b]$. Важнейшим примером чебышёвского подпространства является пространство $\mathcal{P}_n$ (следует помнить, что $\dim P_n = n+1$).

Теорема 4 (Валле Пуссен)**.** *Пусть Φ — n-мерное чебышёвское подпространство, $f \in C[a,b]$, $\phi \in \Phi$, и точки $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$ образуют валле-пуссеновский альтернанс, то есть знаки $f(x_k) - \varphi(x_k)$ чередуются. Тогда*

$$E(f,\Phi) \geqslant \min_{k=0..n} |f(x_k) - \varphi(x_k)|.$$

Доказательство. Действительно, пусть найдётся функция $\psi \in \Phi$, для которой $\|f-\psi\| < \min|f(x_k) - \varphi(x_k)|$. Тогда знак разности $\psi(x_k) - \varphi(x_k)$ совпадает со знаком $f(x_k) - \varphi(x_k)$. Следовательно, $\psi - \varphi$ меняет знак не менее n раз и, по непрерывности, имеет n нулей. В силу чебышёвости $\psi \equiv \varphi$, противоречие. $\square$

Отметим, что мы на самом деле доказали оценку на сетке:

$$E(f,\Phi)_{C[a,b]} \geqslant E(f,\Phi)_{\ell_\infty\{x_k\}_{k=0}^n} \geqslant \min_k |f(x_k) - \varphi(x_k)|.$$

Рассмотрим упорядоченный набор точек $\mathbf{x} = (x_i)_1^{n+1}$. Для любого вектора $\mathbf{y} = (y_i)_1^{n+1}$ составим систему уравнений

$$y_i - \varphi(x_i) = (-1)^i \Lambda, \quad i = 1, \ldots, n+1. \tag{1}$$

Упражнение 1. *Докажите, что система имеет единственное решение $(\varphi, \Lambda) \in \Phi \times \mathbb{R}$.*

Обозначим компоненту Λ решения через $\Lambda(\Phi, \mathbf{x}; \mathbf{y})$; это линейный функционал от $\mathbf{y}$. Из теоремы Валле Пуссена следует оценка

$$\forall \mathbf{x} \quad E(f,\Phi)_C \geqslant |\Lambda(\Phi, \mathbf{x}, (f(x_i))_1^{n+1})|.$$

Равенства (1) ещё не означают, что точки образуют чебышёвский альтернанс, поскольку свойство $|\Lambda| = \|f - \varphi\|$, вообще говоря, не выполнено. Однако из теоремы Чебышёва об альтернансе следует, что при некотором $\mathbf{x}$ равенство достигается и тогда $|\Lambda| = E(f,\Phi)$. На этих соображениях основан следующий алгоритм поиска многочлена наилучшего приближения.

Алгоритм Ремеза. Пусть $f \in C[a,b]$. Будем строить последовательность упорядоченных наборов точек $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$, и т.д., которые в пределе сходятся к чебышёвском альтернансу $\mathbf{x}^{(n)} \to \mathbf{x}^*$.

Набор $\mathbf{x}^{(0)}$ и элемент $\varphi \in \Phi$ выберем произвольно (или исходя из априорной информации о функции f.

Шаг алгоритма. Построим $\mathbf{x}^{(s+1)}$. Для набора $\mathbf{x}^{(s)}$ и функции f строим решение (φ, Λ) уравнений (1). Находим $D_s := \|f-\varphi\|$ и полагаем $d_s := |\Lambda|$, $\varphi^{(s)} := \varphi$. Тогда, из сказанного выше,

$$d_s \leqslant E(f,\Phi) \leqslant \|f-\varphi^{(s)}\| \leqslant D_s.$$

Пусть x^* — точка максимума $|f-\varphi^{(s)}|$; набор $\mathbf{x}^{(s+1)}$ получается из $\mathbf{x}^{(s)}$ заменой одной из точек на x^*, так, чтобы значки разности $f-\varphi^{(s)}$ по-прежнему чередовались.

Доказывается, что D_s-d_s стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, и, следовательно, $\varphi^{(s)}$ стремится к элементу наилучшего приближения.

Примеры. Рассмотрим частный случай $\Phi = \mathcal{P}_{n-1}$.

Упражнение 2. *Рассмотрев набора* $\{\cos(\pi k/n)\}_{k=0}^n$ *на отрезке* $[-1,1]$, *получить следствие:*

$$E(f,\mathcal{P}_{n-1})_{C[-1,1]} \geqslant |\Lambda_n(f)|,$$
$$\Lambda_n(f) := \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f\left(\cos\frac{\pi k}{n}\right) + (-1)^n\frac{1}{2}f(-1)\right). \quad (2)$$

Упражнение 3. *Доказать неравенство с классической n-й разностью:*

$$E(f,\mathcal{P}_{n-1})_{C[0,1]} \geqslant 2^{-n}\omega_n(f,1/n). \quad (3)$$

Напомним, $\omega_n(f,\delta) := \max_{0\leqslant h\leqslant\delta}\|\Delta_h^n(f)\|$, где Δ_h — оператор разности с шагом h, $\Delta_h f(x) = f(x+h)-f(x)$.

Положительные операторы Нам потребуется неравенство $E(|x|,\mathcal{P}_n)_{C[-1,1]} \geqslant c/n$, с абсолютной постоянной $c>0$ (на самом деле, имеет место асимптотика $c/n(1+o(1))$; константа c неизвестна). Здесь проще всего перейти к тригонометрическим полиномам $\mathcal{T}_n = \{\sum_{|k|\leqslant n} c_k e^{ikx}$ (подробнее о них

– в следующей лекции). Мы докажем эквивалентное (почему?) неравенство $E(|\cos t|, \mathcal{T}_n) \geqslant c/n$. Известно, что суммы Валле Пуссена обладают свойствами: 1) $V_n f = f$ при $t \in \mathcal{T}_n$; 2) $\|V_n f\| \leqslant 3\|f\|$. Отсюда вытекает неравенство Лебега:

$$\|f - V_n f\| = \|(f - T_n^*) - V_n(f - T_n^*)\| \leqslant 4E(f, \mathcal{T}_n).$$

Можно смотреть на это неравенство как на нижнюю оценку для наилучшего приближения. Применим его для $f = |\cos t|$; выпишем ряд Фурье

$$f(t) = |\cos t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1},$$

в точке излома $t = \pi/2$ имеем значение $f(\pi/2) = 0$ и знакопостоянный ряд

$$f(\pi/2) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2 - 1)^{-1}.$$

Отсюда легко видеть, что $S_n(f, \pi/2) \geqslant c/n$, значит, и $V_n(f, \pi/2) \geqslant c/n$.

Определение 1. *Оператор $U\colon C[a,b] \to C[a,b]$ называется положительным, если $f \geqslant 0$ влечёт $Uf \geqslant 0$.*

Стандартным образом обозначаем $(Uf)(x) = U(f, x)$.

Упражнение 4. *Докажите неравенство:*

$$|U(fg, x)| \leqslant U(f^2, x)^{1/2} U(g^2, x)^{1/2}. \tag{4}$$

Пример семейства положительных операторов: многочлены Бернштейна

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Другой известный пример — суммы Фейера.

Положительные операторы обладают рядом хороших свойств. Имеется теорема Коровкина (1957), утверждающая, что для равномерной сходимости $U_n f \rightrightarrows f$ при всех $f \in C[a,b]$ достаточно сходимости для трёх функций $e_0(x) \equiv 1$, $e_1(x) \equiv x$, $e_2(x) \equiv x^2$. Однако, положительные операторы обладают свойством *насыщения*, сходимость не может быть слишком быстрой.

Теорема 5 (Коровкин). *Пусть U_n — семейство положительных полиномиальных операторов $C[a,b] \to \mathcal{P}_n$. Тогда величина*

$$\lambda_n := \max_{k=0,1,2} \|e_k - U_n e_k\|$$

не может стремиться к нулю слишком быстро: $\lambda_n \neq o(1/n^2)$.

Доказательство. Введём обозначения: $h(x) = |x|$, $h_t(x) = |x-t|$. Мы предположим, что $\lambda_n = o(1/n^2)$, выведем отсюда, что $\|U_n h - h\| = o(1/n)$ и придём к противоречию с оценкой $E(|x|, \mathcal{P}_n)_{C[-1,1]} \geqslant c/n$.

Итак, оценим $|U_n(h,x) - h(x)|$:

$$|U_n(h,t) - h(t)| = |U_n(h - |t|e_0, t) + |t|U_n(e_0,t) - |t|| \leqslant \\ |U_n(h - |t|e_0, t)| + |t|(U_n(e_0,t) - 1)| \leqslant |U_n(h - |t|e_0, t)| + \lambda_n.$$

Далее, $||x| - |t|| \leqslant |x-t| = h_t(x)$, поэтому $|U_n(h - |t|e_0, t)| \leqslant U_n(h_t, t)$. Воспользуемся (4):

$$U_n(h_t,t) \leqslant U_n(h_t^2,t)^{1/2} U_n(e_0^2,t)^{1/2} \leqslant U_n(h_t^2,t)^{1/2}\sqrt{1+\lambda_n}.$$

Наконец,

$$U_n(h_t^2,t) = U_n((x-t)^2,t) = U_n(e_2 - 2te_1 + t^2 e_0, t) = \\ (U_n(e_2,t) - t^2) - 2t(U_n(e_1,t) - t) + t^2(U_n(e_0,t) - 1) \leqslant 4\lambda_n.$$

Окончательно, $|U_n(h,t) - h(t)| \leqslant 2\sqrt{\lambda_n(1+\lambda_n)} = o(1/n)$, что невозможно. □

Задача 1. *Возможно ли $\lambda_n = O(1/n^2)$?*