Спецкурс 2020/2021: “Геометрические и комбинаторные свойства матриц и аппроксимация”
Блок лекций “Сложность матриц и аппроксимация”
Лекция 1: “Коммуникационная сложность”

17 октября 2020 г.

Коммуникационная сложность (Yao, 1979)

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — два конечных множества, $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \{0, 1\}$. Рассмотрим задачу коммуникации. Есть два участника, Анна и Борис, их задача: по выданным x и y вычислить $f(x, y)$. Трудность в том, что x известно только Анне, а y — только Борису. Им разрешается обмениваться сообщениями: Анна посылает $a_1 = A_1(x)$, Борис в ответ $b_1 = B_1(y, a_1)$, и т.д. Правило составления сообщений — протокол — должно гаранировать восстановление $f(x, y) = b_t$ на некотором шаге.

Коммуникационная сложность (Yao, 1979)

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — два конечных множества, $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \{0, 1\}$. Рассмотрим задачу коммуникации. Есть два участника, Анна и Борис, их задача: по выданным x и y вычислить $f(x, y)$. Трудность в том, что x известно только Анне, а y — только Борису. Им разрешается обмениваться сообщениями: Анна посылает $a_1 = A_1(x)$, Борис в ответ $b_1 = B_1(y, a_1)$, и т.д. Правило составления сообщений — протокол — должно гаранировать восстановление $f(x, y) = b_t$ на некотором шаге. Через $\mathrm{C}(P)$ обозначим суммарную длину (в битах) сообщений в худшем случае, если используется протокол P. Минимально возможное значение $\mathrm{C}(P)$ по всем протоколам называется *коммуникационной сложностью* f и обозначается через $\mathrm{C}(f)$:

$$\mathrm{C}(f) := \min_{P} \max_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \sum_{i\leqslant t(P;x,y)} \mathrm{len}(a_i(P; x, y)) + \mathrm{len}(b_i(P; x, y)).$$

Формализации понятия протокола могут немного отличаться. Для нас это не играет роли, т.к. мы интересуемся величиной C с точностью до мультипликативной постоянной. Один из вариантов определения протокола: бинарное дерево, в каждой из вершин либо $A_v \colon \mathcal{X} \to \{0,1\}$, либо $B_v \colon \mathcal{Y} \to \{0,1\}$, в листе ответ.

Формализации понятия протокола могут немного отличаться. Для нас это не играет роли, т.к. мы интересуемся величиной C с точностью до мультипликативной постоянной. Один из вариантов определения протокола: бинарное дерево, в каждой из вершин либо $A_v \colon \mathcal{X} \to \{0,1\}$, либо $B_v \colon \mathcal{Y} \to \{0,1\}$, в листе ответ.

Тривиальная оценка:

$$\mathrm{C}(f) \leqslant \lceil \log_2 |\mathcal{X}| \rceil + 1.$$

Действительно, Анна кодирует элемент $x \in \mathcal{X}$ с помощью $\lceil \log_2 |\mathcal{X}| \rceil$ бит и отправляет Борису. Борис восстанавливает x и отправляет Анне $f(x,y)$.

Одноцветные прямоугольники

Получим оценку снизу на $\mathrm{C}(f)$. Введём понятие *истории* сообщений: $h = (a_1, b_1, a_2, \ldots)$. Для оптимального протокола всего не более $2^{\mathrm{C}(f)}$ историй(*). Пусть $R_h = \{(x, y) \mapsto h\}$.

- f на R_h либо всюду 1, либо 0 (т.е. множество R_h “одноцветно”);
- R_h не пересекаются и их объединение есть $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- R_h есть прямоугольник, т.е. имеет вид $I \times J$.

Одноцветные прямоугольники

Получим оценку снизу на $\mathrm{C}(f)$. Введём понятие *истории* сообщений: $h = (a_1, b_1, a_2, \ldots)$. Для оптимального протокола всего не более $2^{\mathrm{C}(f)}$ историй(*). Пусть $R_h = \{(x, y) \mapsto h\}$.

- f на R_h либо всюду 1, либо 0 (т.е. множество R_h “одноцветно”);
- R_h не пересекаются и их объединение есть $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- R_h есть прямоугольник, т.е. имеет вид $I \times J$.

Поясним последнее свойство. Пара (x, y) попадает в историю $h = (a_1, b_1, \ldots)$, когда выполнены условия:

$$A_1(x) = a_1,\ B_1(y, a_1) = b_1,\ A_2(x, a_1, b_1) = a_2, \ldots$$

Т.е. условия распадаются на зависящие только от x (нечётные) и от y (чётные).

Одноцветные прямоугольники

Получим оценку снизу на $\mathrm{C}(f)$. Введём понятие *истории* сообщений: $h = (a_1, b_1, a_2, \ldots)$. Для оптимального протокола всего не более $2^{\mathrm{C}(f)}$ историй(*). Пусть $R_h = \{(x, y) \mapsto h\}$.

- f на R_h либо всюду 1, либо 0 (т.е. множество R_h "одноцветно");
- R_h не пересекаются и их объединение есть $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- R_h есть прямоугольник, т.е. имеет вид $I \times J$.

Поясним последнее свойство. Пара (x, y) попадает в историю $h = (a_1, b_1, \ldots)$, когда выполнены условия:

$$A_1(x) = a_1,\ B_1(y, a_1) = b_1,\ A_2(x, a_1, b_1) = a_2, \ldots$$

Т.е. условия распадаются на зависящие только от x (нечётные) и от y (чётные).

Через $\chi(f)$ обозначим минимальное количество f-одноцветных прямоугольников, на которые можно разбить $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Из вышесказанного следует:

$$\chi(f) \leqslant 2^{\mathrm{C}(f)}.$$

Пример: EQ

Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и $|X| = N$. Положим $\mathrm{EQ}_N(x, y) = 1$, если $x = y$ и 0 иначе. Утверждение: $\mathrm{C}(\mathrm{EQ}_N) \asymp \log N$.

Пример: EQ

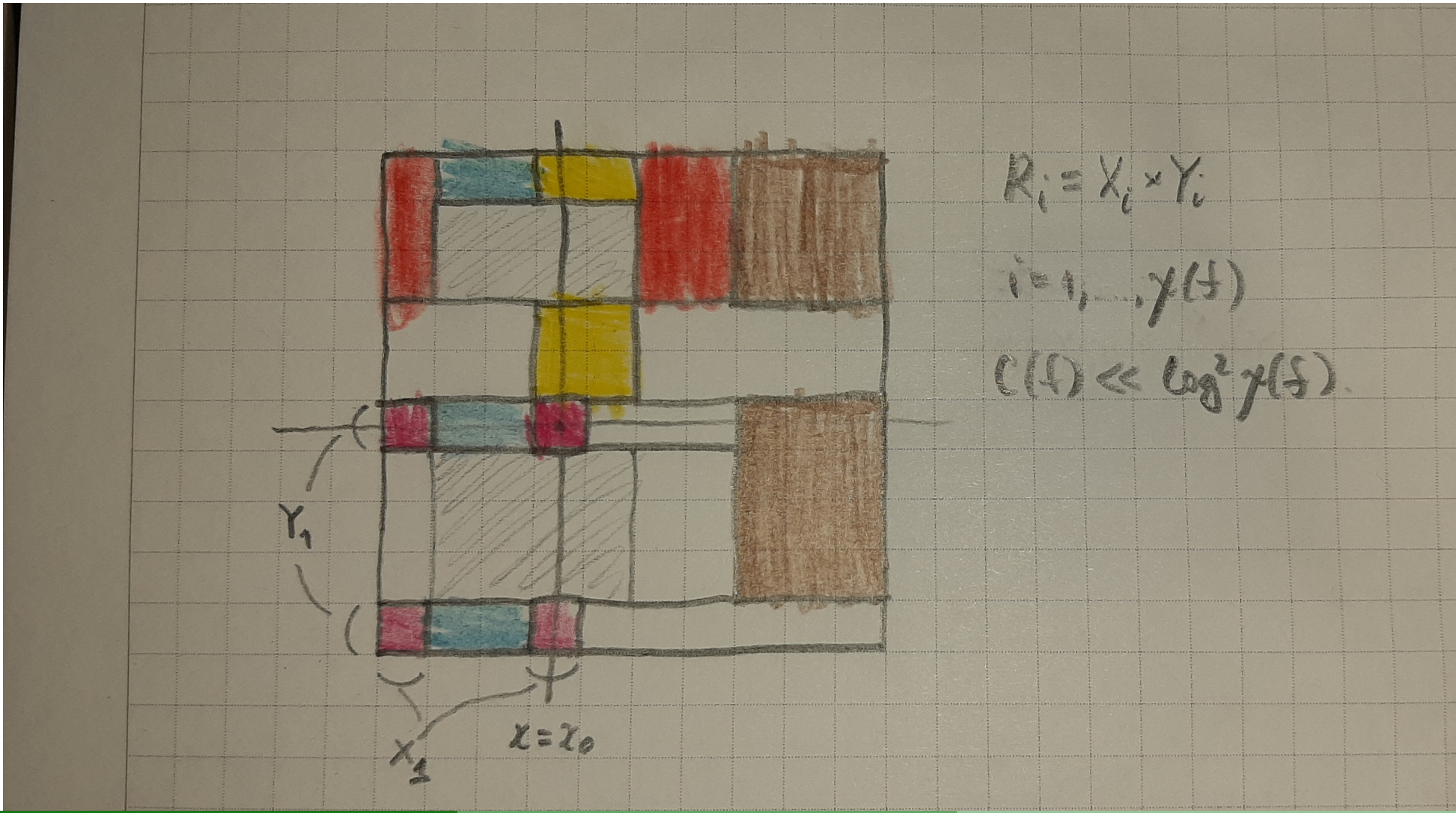
Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и $|X| = N$. Положим $\mathrm{EQ}_N(x, y) = 1$, если $x = y$ и 0 иначе. Утверждение: $\mathrm{C}(\mathrm{EQ}_N) \asymp \log N$.

Оценка сверху тривиальна. Оценка снизу следует из $\mathrm{C}(f) \geqslant \log_2 \chi(f)$. Рассмотрим разбиение на одноцветные прямоугольники. Прямоугольник с $\mathrm{EQ}_N = 1$ может содержать только одну точку (x, x), следовательно, их не меньше N и $\chi(\mathrm{EQ}_N) \geqslant N$.

Имеет место обратное неравенство (Aho, Ullman, Yannakakis, 1983):

$$\mathrm{C}(f) \ll \log^2 \chi(f).$$

Упражнение. Докажите неравенство. (Анна и Борис должны определить прямоугольник, в котором находятся.)



Связь с рангом

Занумеруем множества: $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_M\}$ и $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$. Тогда функцию f можно отождествить с матрицей из $\{0,1\}^{M\times N}$:

$$f \quad \longleftrightarrow \quad (f(x_i, y_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ 1\leqslant j\leqslant N}}.$$

Мы будем пользоваться матричной терминологией, не оговаривая этого особо.

Связь с рангом

Занумеруем множества: $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_M\}$ и $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$. Тогда функцию f можно отождествить с матрицей из $\{0,1\}^{M\times N}$:

$$f \quad \longleftrightarrow \quad (f(x_i, y_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ 1\leqslant j\leqslant N}}.$$

Мы будем пользоваться матричной терминологией, не оговаривая этого особо.

Утверждение: $\chi(f) \geqslant \operatorname{rank} f$. Действительно, матрица f представляется в виде суммы матриц $f|_{R_h}$. Каждая из них имеет ранг 1 в силу того, что R_h — одноцветный прямоугольник. Следствие:

$$\mathrm{C}(f) \geqslant \log_2 \chi(f) \geqslant \log_2 \operatorname{rank} f.$$

Пример. Для любой невырожденной $N \times N$ матрицы имеем $\mathrm{C}(f) \asymp \log N$.

Нерешенные проблемы

Итак, $\log \chi(f) \ll \mathrm{C}(f) \ll (\log \chi(f))^2$.
Проблема 1. Верно ли, что $\mathrm{C}(f) \ll \log \chi(f)$?

Нерешенные проблемы

Итак, $\log \chi(f) \ll \mathrm{C}(f) \ll (\log \chi(f))^2$.
Проблема 1. Верно ли, что $\mathrm{C}(f) \ll \log \chi(f)$?

Гипотеза. Верно ли, что $\log \chi(f) \ll \log \operatorname{rank} f$?

Нерешенные проблемы

Итак, $\log \chi(f) \ll \mathrm{C}(f) \ll (\log \chi(f))^2$.
Проблема 1. Верно ли, что $\mathrm{C}(f) \ll \log \chi(f)$?

Гипотеза. Верно ли, что $\log \chi(f) \ll \log \operatorname{rank} f$?

Гипотеза была опровергнута в серии публикаций (Alon-Seymour, Raz-Spieker, Razborov).

Нерешенные проблемы

Итак, $\log \chi(f) \ll \mathrm{C}(f) \ll (\log \chi(f))^2$.
Проблема 1. Верно ли, что $\mathrm{C}(f) \ll \log \chi(f)$?

Гипотеза. Верно ли, что $\log \chi(f) \ll \log \operatorname{rank} f$?

Гипотеза была опровергнута в серии публикаций (Alon-Seymour, Raz-Spieker, Razborov).

Проблема 2 (log-rank гипотеза). Верно ли, что $\log \chi(f) \ll (\log \operatorname{rank} f)^C$?

Вероятностные модели

Предположим, Анна и Борис имеют доступ к последовательностям случайных бит (достаточно большой длины) и могут использовать эти биты во время исполнения протокола (или: подбрасывать монету).
Тогда результат работы протокола Q на входе (x, y) это случайная величина $Q(x, y)$.
Скажем, что протокол Q вычисляет f с ошибкой ε, если

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \quad \mathrm{P}(Q(x, y) \neq f(x, y)) \leqslant \varepsilon.$$

(Ясно, что можно обеспечить $\varepsilon = 1/2$, просто бросая монетку.)

Вероятностные модели

Предположим, Анна и Борис имеют доступ к последовательностям случайных бит (достаточно большой длины) и могут использовать эти биты во время исполнения протокола (или: подбрасывать монету). Тогда результат работы протокола Q на входе (x, y) это случайная величина $Q(x, y)$.
Скажем, что протокол Q вычисляет f с ошибкой ε, если

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \quad \mathrm{P}(Q(x, y) \neq f(x, y)) \leqslant \varepsilon.$$

(Ясно, что можно обеспечить $\varepsilon = 1/2$, просто бросая монетку.)

Минимальная сложность протокола, вычисляющего f с ошибкой $\leqslant 1/3$, обозначается $R(f)$ и называется *вероятностной коммуникационной сложностью f в модели с ограниченной ошибкой*.
Ошибку $\varepsilon = 1/3$ можно превратить в $\varepsilon = 10^{-100}$, повторив действия достаточное количество раз.

Сложность вычисления EQ_N с ограниченной ошибкой

Theorem (Yao, Rabin)

$R(\mathrm{EQ}_N) \ll \log\log N$.

Доказательство. Закодируем элементы $\mathcal{X}$ двоичными векторами $x \in \{0,1\}^n$, где $n = \lceil \log_2 N \rceil$. Вектор x отождествим с многочленом $x_1 + x_2\xi + \ldots + x_n\xi^{n-1}$. Таким образом, у Анны и Бориса есть многочлены $g(\xi)$ и $h(\xi)$ и они хотят определить, равны ли эти многочлены.

Сложность вычисления EQ_N с ограниченной ошибкой

Theorem (Yao, Rabin)

$R(\mathrm{EQ}_N) \ll \log\log N.$

Доказательство. Закодируем элементы $\mathcal{X}$ двоичными векторами $x \in \{0,1\}^n$, где $n = \lceil \log_2 N \rceil$. Вектор x отождествим с многочленом $x_1 + x_2\xi + \ldots + x_n\xi^{n-1}$. Таким образом, у Анны и Бориса есть многочлены $g(\xi)$ и $h(\xi)$ и они хотят определить, равны ли эти многочлены.

Заранее фиксируется простое число $p \in [3n, cn]$. Анна выбирает случайное $\xi \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ и отправляет пару $(\xi, g(\xi) \bmod p)$ Борису. Борис вычисляет $h(\xi) \bmod p$ и выдаёт "1", если значения совпали и "0" в противном случае.
По протоколу передаётся $\asymp \log p \asymp \log\log N$ бит, как и требовалось.
Какова вероятность успеха?

Сложность вычисления EQ_N (продолжение)

Если $g = h$, то выдаётся “1” безо всякой ошибки.
Если $g \neq h$, то $g - h$ это ненулевой многочлен степени не выше n, он имеет не более n корней в $\mathbb{F}_p$, то есть количество ξ, таких что $g(\xi) = h(\xi)$, не превосходит $n \leqslant p/3$. Значит, вероятность ошибиться не больше $1/3$.

Дискрепанс

В детерминированной модели мы рассматривали f-одноцветные прямоугольники (и доказывали, что их должно быть много, т.к. они в том или ином смысле малы). В вероятностной модели нужно рассматривать произвольные прямоугольники R. Пусть $N_0(f, R)$ — количество точек в R, для которых $f = 0$, а $N_1(f, R)$ — количество точек с $f = 1$. Для нижних оценок сложности нам нужно доказать, что если прямоугольник большой, то он “сбалансированный”, то есть N_0 и N_1 близки друг к другу.

Дискрепанс

В детерминированной модели мы рассматривали f-одноцветные прямоугольники (и доказывали, что их должно быть много, т.к. они в том или ином смысле малы). В вероятностной модели нужно рассматривать произвольные прямоугольники R. Пусть $N_0(f, R)$ — количество точек в R, для которых $f = 0$, а $N_1(f, R)$ — количество точек с $f = 1$. Для нижних оценок сложности нам нужно доказать, что если прямоугольник большой, то он “сбалансированный”, то есть N_0 и N_1 близки друг к другу.

Дискрепансом функции $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \{0, 1\}$ назовём величину

$$\mathrm{disc}_u(f) = \max_R \frac{|N_0(f, R) - N_1(f, R)|}{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|}.$$

Эта величина измеряет отклонение f от равномерного распределения, для семейства комбинаторных прямоугольников.

Дискрепанс

В детерминированной модели мы рассматривали f-одноцветные прямоугольники (и доказывали, что их должно быть много, т.к. они в том или ином смысле малы). В вероятностной модели нужно рассматривать произвольные прямоугольники R. Пусть $N_0(f, R)$ — количество точек в R, для которых $f = 0$, а $N_1(f, R)$ — количество точек с $f = 1$. Для нижних оценок сложности нам нужно доказать, что если прямоугольник большой, то он "сбалансированный", то есть N_0 и N_1 близки друг к другу.

Дискрепансом функции $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \{0, 1\}$ назовём величину

$$\mathrm{disc}_u(f) = \max_R \frac{|N_0(f, R) - N_1(f, R)|}{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|}.$$

Эта величина измеряет отклонение f от равномерного распределения, для семейства комбинаторных прямоугольников. Возможно обобщение на другие распределения μ на множестве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$\mathrm{disc}_\mu(f) = \max_R |\mu(R \cap \{f = 0\}) - \mu(R \cap \{f = 1\})|$$

(нам встретится эта величина позже).

Дискрепанс

$$\mathrm{disc}_u(f) = \max_R \frac{|N_0(f,R) - N_1(f,R)|}{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|}.$$

Если R — одноцветный прямоугольник, то $\mathrm{disc}_u(f) \geqslant |R|/|\mathcal{X} \times Y|$.
Суммируя по одноцветным прямоугольникам, получим
$\chi(f)\mathrm{disc}_u(f) \geqslant 1$, то есть

$$\chi(f) \geqslant 1/\mathrm{disc}_u(f), \quad \mathrm{C}(f) \geqslant \log_2(1/\mathrm{disc}_u(f)).$$

Дискрепанс

$$\mathrm{disc}_u(f) = \max_R \frac{|N_0(f,R) - N_1(f,R)|}{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|}.$$

Если R — одноцветный прямоугольник, то $\mathrm{disc}_u(f) \geqslant |R|/|\mathcal{X} \times Y|$.
Суммируя по одноцветным прямоугольникам, получим
$\chi(f)\mathrm{disc}_u(f) \geqslant 1$, то есть

$$\chi(f) \geqslant 1/\mathrm{disc}_u(f), \quad \mathrm{C}(f) \geqslant \log_2(1/\mathrm{disc}_u(f)).$$

Оказывается, имеет место намного более сильный результат:

$$R(f) \gg \log(1/\mathrm{disc}_u(f)).$$

Пример: $\mathrm{IP}_n(x, y) = \sum x_i y_i \bmod 2$, $x, y \in \{0,1\}^n$.

Пример: $\mathrm{IP}_n(x, y) = \sum x_i y_i \bmod 2$, $x, y \in \{0,1\}^n$.

Пусть M — матрица из $\{\pm 1\}^{N \times N}$. Дискрепанс определяется аналогично, как максимум по комбинаторным прямоугольникам R величины $N^{-2} |\sum_{(i,j) \in R} M_{i,j}|$.

Пример: $\mathrm{IP}_n(x, y) = \sum x_i y_i \bmod 2$, $x, y \in \{0,1\}^n$.

Пусть M — матрица из $\{\pm 1\}^{N \times N}$. Дискрепанс определяется аналогично, как максимум по комбинаторным прямоугольникам R величины $N^{-2}|\sum_{(i,j)\in R} M_{i,j}|$. Применим линейную алгебру! Пусть $R = A \times B$, тогда дискрепанс равен

$$N^{-2}|\sum_{(i,j)\in R} M_{i,j}| = N^{-2}|1_A^t M 1_B| \leqslant$$

$$\leqslant N^{-2}\|1_A\|_2 \cdot \|1_B\|_2 \cdot \|M\|_{2\to 2} \leqslant N^{-2}|A|^{1/2}|B|^{1/2}\|M\|_{2\to 2}.$$

Следовательно, $\mathrm{disc}_u(M) \leqslant N^{-1}\|M\|_{2\to 2}$.

Пример: $\mathrm{IP}_n(x, y) = \sum x_i y_i \bmod 2$, $x, y \in \{0,1\}^n$.

Пусть M — матрица из $\{\pm 1\}^{N \times N}$. Дискрепанс определяется аналогично, как максимум по комбинаторным прямоугольникам R величины $N^{-2}|\sum_{(i,j)\in R} M_{i,j}|$. Применим линейную алгебру! Пусть $R = A \times B$, тогда дискрепанс равен

$$N^{-2}|\sum_{(i,j)\in R} M_{i,j}| = N^{-2}|1_A^t M 1_B| \leqslant$$

$$\leqslant N^{-2}\|1_A\|_2 \cdot \|1_B\|_2 \cdot \|M\|_{2\to 2} \leqslant N^{-2}|A|^{1/2}|B|^{1/2}\|M\|_{2\to 2}.$$

Следовательно, $\mathrm{disc}_u(M) \leqslant N^{-1}\|M\|_{2\to 2}$.

Рассмотрим матрицу W_n, соответствующую $2 \cdot \mathrm{IP}_n - 1$ (т.е. значения $\{0,1\}$ заменили на $\{-1,1\}$). Получится так называемая матрица *Уолша–Адамара*. Нетрудно видеть, что строки матрицы ортогональны и их длина равна $2^{n/2}$. Следовательно, $\|W_n\|_{2\to 2} = 2^{n/2}$. Значит, $\mathrm{disc}_u(\mathrm{IP}_n) = \mathrm{disc}_u(W_n) \leqslant 2^{-n/2}$, откуда $R(\mathrm{IP}_n) \gg n$.
В отличие от EQ_N, функция IP_n осталась сложной даже с разрешенной ограниченной ошибкой.

Таблица результатов

$U(f)$ — сложность с “неограниченной ошибкой” (вероятность успеха $> 1/2$).

f	$\mathrm{C}(f)$	$R(f)$	$U(f)$
EQ	$\asymp \log N$	$O(\log \log N)$	$O(1)$
DISJ	$\asymp \log N$	$\asymp \log N$	$O(\log \log N)$
IP	$\asymp \log N$	$\asymp \log N$	$\asymp \log N$ (Forster)

Список литературы

- А.А. Разборов, “Коммуникационная сложность”.
- E. Kushilevitz, N. Nisan, “Communication complexity”.
- S. Arora, B. Barak, “Computational Complexity: A Modern Approach”.