Курс “Методы линейной алгебры в теории приближений”. Лекция 3. Унитарно–инвариантные нормы.

21 октября 2023 г.

Симметричные нормы в $\mathbb{R}^n$. Назовём норму в $\mathbb{R}^n$ симметричной, если выполнены условия:

- монотонность: если $|x_i| \leqslant |y_i|$ при $i = 1, \ldots, n$, то $\|x\| \leqslant \|y\|$,
- $\|\pi x\| = \|x\|$ для любой перестановки координат.

Ясно, что такая норма не зависит от знаков координат: $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \|(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Более того, пусть $x_1^* \geqslant x_2^* \geqslant \ldots \geqslant x_n^*$ — невозрастающая перестановка модулей координат. Тогда $\|x\| = \|(x_1^*, \ldots, x_n^*)\|$. Поменял немного обозначения по сравнению с лекцией, см. также $x^{\downarrow}$ ниже.

Отметим, что вместо монотонности можно требовать более слабое условие: $\|x\| = \|(|x_1|, \ldots, |x_n|)\|$. Действительно, из монотонности следует, что норма не меняется при смене знака (т.к. если бы она уменьшилась, то при обратной смене не вернулась бы). Обратно, пусть норма не меняется при смене знака и пусть $|x_i| \leqslant |y_i|$. Можем считать все координаты неотрицательными. Достаточно доказать, что для любого $t \in [0, 1]$ имеем

$$\|(y_1, \ldots, y_{i-1}, ty_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\| \leqslant \|(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)\|$$

(каждую координату потом сможем так “ужать”). Для этого представим первый вектор в виде суммы

$$(y_1, \ldots, y_{i-1}, ty_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) = \frac{1+t}{2}(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) + \frac{1-t}{2}(y_1, \ldots, -y_i, \ldots, y_n).$$

Дальше применяем неравенство треугольника и получаем $\frac{1+t}{2}\|y\|+\frac{1-t}{2}\|y\| = \|y\|$.

Упражнение. Является ли $x_1^* + 2x_2^*$ нормой?

Примеры симметричных норм:

- обычные ℓ_p^n-нормы: $\|x\|_p$,
- нормы Ки-Фаня $\|x\|_{(k)} = x_1^* + \ldots + x_k^*$.

Важность норм Ки-Фаня видна из следующего утверждения. Для его формулировки нам понадобится ещё несколько обозначений.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $x^\downarrow = (x_1^\downarrow, \ldots, x_n^\downarrow)$ обозначим перестановку координат в невозрастающем порядке: $x_1^\downarrow \geqslant \ldots \geqslant x_n^\downarrow$. Отличие от x_k^* в том, что не берём модули, среди $x_i^\downarrow$ могут быть отрицательные числа.

Скажем, что вектор x *мажорируется* вектором y, обозначение: $x \prec y$, если выполнены два условия:

- $x_1^\downarrow + \ldots + x_k^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + \ldots + y_k^\downarrow$ при $k = 1, \ldots, n$,
- $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.

Характерный пример:

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \prec (p_1, \ldots, p_n) \prec (1, 0, \ldots, 0)$$

для любого распределения вероятностей (p_i). Слева “хаос”, справа “порядок”. Неформально говоря, при усреднении мы получаем мажорируемый вектор.

Лемма 1. *(i) Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Неравенство $\|x\| \leqslant \|y\|$ справедливо для любой симметричной нормы тогда и только тогда, когда оно верно для норм Ки-Фаня: $\|x\|_{(k)} \leqslant \|y\|_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$.*

(ii) Пусть $x \prec y$. Тогда для любой симметричной нормы: $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Доказательство. Начнём с пункта (ii). Мы докажем, что если $x \prec y$, то x лежит в выпуклой оболочке перестановок y, т.е. $x = \sum_{i=1}^N t_i \pi_i y$, где $t_i \geqslant 0$, $\sum t_i = 1$. Отсюда сразу последует неравенство $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Без ограничения общности считаем, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$.

Начнём со случая $n = 2$. Пусть $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, но $x_1 \leqslant y_1$. Ясно, что в этом случае $x_1 = ty_1 + (1-t)y_2$ для некоторого $t \in [0,1]$, и тогда $x_2 = y_1 + y_2 - x_1 = (1-t)y_1 + ty_2$. В целом $(x_1, x_2) = t(y_1, y_2) + (1-t)(y_2, y_1)$, что и требовалось.

Обобщим формулу на $n > 2$. Назовём T-преобразованием отображение вида

$$y \mapsto (y_1, \ldots, y_{i-1}, ty_i + (1-t)y_j, y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}, (1-t)y_i + ty_j, y_{j+1}, \ldots).$$

Т.е. все координаты кроме i и j остаются на месте, а i, j "комбинируются".

Покажем, что $Ty \prec y$. Условие на сумму всех координат выполнено. Далее, при $k < i$ координаты совпадают. При $k = i$ в сумму Ty добавляется $ty_i + (1-t)y_j$, что не больше y_i в силу монотонности координат. Дальше при $i < k < j$ снова прибавляются одни и те же координаты. При $k = j$ суммы сравниваются.

Наконец, покажем, что можно последовательностью T-преобразований перейти от y к x: $y \succ T_1 y \succ T_2 T_1 y \succ \ldots \succ T_k \cdots T_1 y = x$. При этом мы всё время находимся в многограннике, натянутом на перестановки вектора y, и, следовательно, x тоже в этом многограннике.

Первым шагом сравняем первые координаты: т.к. $x_1 < y_1$ (в случае равенства шаг можно пропустить), то $y_k \leqslant x_1 \leqslant y_{k-1}$ для некоторого k. Поэтому $x_1 = ty_1 + (1-t)y_k$, и преобразование

$$T_1 \colon y \mapsto (ty_1 + (1-t)y_k, y_2, \ldots, y_{k-1}, (1-t)y_1 + ty_k, y_{k+1}, \ldots)$$

уравнивает первые координаты x и $T_1 y$. Проверим, что вектора с отброшенными первыми координатами так же мажорируются:

$$(x_2, \ldots, x_n) \prec (y_2, \ldots, y_{k-1}, (1-t)y_1 + ty_k, y_{k+1}, \ldots).$$

При $m < k$ получаем неравенство $\sum_{j=2}^m x_j \leqslant \sum_{j=2}^m y_j$, верное в силу того, что $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_{k-1} \geqslant x_1 \geqslant \ldots$. При $m \geqslant k$ получаем слева сумму $\sum_{j=2}^m x_j$,

а справа — сумму

$$\sum_{j=2}^{k-1} y_j + (1-t)y_1 + ty_k + \sum_{j=k+1}^{n} y_j =$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j - ty_1 + (t-1)y_k =$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j - x_1 \geqslant \sum_{j=1}^{m} x_j - x_1 = \sum_{j=2}^{m} x_j.$$

Теперь мы можем сравнять вторые координаты векторов и так далее по индукции.

Пункт (ii) доказан. Для доказательства (i) сделаем следующее. Считаем $x_i, y_i \geqslant 0$. Если $\sum x_i = \sum y_i$, то $x \prec y$ и всё доказано. Иначе, дополним вектор x координатами $\varepsilon > 0$ в количестве N штук:

$$x' = (x_1, \ldots, x_n, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon),$$

$$y' = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots, 0).$$

Чтобы суммы координат x' и y' сравнялись, нужно выбрать $\varepsilon = (\sum y_i - \sum x_i)/N$. Нетрудно проверить, что при достаточно большом N получим $x' \prec y'$. Поэтому $x' = \sum t_i \pi y'$. Ограничивая это равенство на первые n координат, получим, что x лежит в выпуклой оболочке векторов вида $(\pi_i y')|_{\{1,\ldots,n\}}$, т.е. перестановок y, часть координат у которых обнулена. Ясно, что тогда $\|x\| \leqslant \|y\|$. $\square$

Унитарно–инвариантные нормы. Перейдём к нормам на пространствах матриц. Назовём норму унитарно–инвариантной, если

$$\|UAV\| = \|A\|$$

для любых ортогональных (в комплексном случае — унитарных) матриц U, V, и для любой матрицы A.

Чтобы не путать матричные и векторные нормы, в этом разделе векторные нормы будем обозначать функционально: $\Phi(x)$.

Теорема 1. *Если Φ — симметричная норма на $\mathbb{R}^n$, то величина*

$$\|A\| := \Phi(\vec{\sigma}(A))$$

является унитарно–инвариантной нормой.

Обратно, любая унитарно–инвариантная норма $\|\cdot\|$ *имеет такой вид. А именно, положим* $\Phi(x) := \|\mathrm{diag}(x)\|$, *тогда* Φ *является симметричной нормой.*

Доказательство. Рассмотрим величину $\Phi(\vec{\sigma}(A))$. Во-первых, она унитарно инвариантна, поскольку сигнулярные числа унитарно–инвариантны (см. теорему об SVD). Однородность и неотрицательность очевидны, проверим неравенство треугольника. Нужно доказать, что

$$\Phi(\vec{\sigma}(A+B)) \leqslant \Phi(\vec{\sigma}(A)) + \Phi(\vec{\sigma}(B)).$$

Как мы знаем из леммы, достаточно это проверить для норм Ки-Фаня:

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A) + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(B).$$

Это — уже встречавшееся нам неравенство Ки–Фаня.

Обратно. Величина Φ является нормой, так как $\|\cdot\|$ — норма. Симметричность проверяется так: смена знака у i-й координаты x соответствует смене знака у i-го столбца $\mathrm{diag}(x)$, что соответствует умножению справа на ортонональную матрицу. Аналогично с перестановками. $\square$

Матричные нормы. Подведём итог, какие мы встретили нормы на пространстве матриц.

1. Важный класс — унитарно–инвариантные нормы. В самом общем виде: $\Phi(\vec{\sigma}(A))$. Частные случаи:

- при $\Phi(x) = \|x\|_p$ получаем нормы Шаттена $\|A\|_{S_p}$, в частности:
  - при $p = \infty$ получаем $\|A\|_{S_\infty} = \sigma_1(A) = \max\limits_{|x|=1} |Ax| = \|A\|_{2\to 2}$, спектральная, или операторная норма, наиболее важная матричная норма, часто её обозначают просто $\|A\|$;
  - при $p = 2$ получаем $\|A\|_{S_2} = (\sum_{i,j} A_{i,j}^2)^{1/2} = \|A\|_F$, норма Фробениуса; для проверки равенства заметим, что оно выполнено для диагональных матриц и обе величины унитарно–инвариантны;
  - при $p = 1$ получаем $\|A\|_{S_1} = \|A\|_{\mathrm{tr}}$, другое название — следовая норма;

- при $\Phi(x) = \|x\|_{(k)}$ получаем нормы Ки-Фаня $\sigma_1(A) + \ldots + \sigma_k(A)$, их важность мы уже увидели.

2. Операторные нормы. Пусть $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$,

$$\|A\|_{p\to q} := \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_q = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p}.$$

Частные случаи:

- при $p = q = 2$ см. выше;
- при $p = 1$ норма равна $\max_{\|x\|_1\leqslant 1} \|A\|_q = \max \|A^j\|_q$, где A^j суть столбцы матрицы (т.к. норма выпукла и максимум выпуклой функции достигается на крайних точках, т.е. для $x = \pm e_j$); это верно и в более общем случае $1 \to X$;
- при $p = 1$, $q = \infty$ имеем $\|A\|_{1\to\infty} = \max |A_{i,j}|$;
- в силу равенства нормы оператора и его сопряжённого, имеем $\|A^t\|_{p\to q} = \|A\|_{q'\to p'}$; в частности, $\|A\|_{q'\to\infty} = \max \|A_i\|_q$, где A_i суть строки A.

Приближение матрицами малого ранга и теорема Эккарта–Юнга–Мирского. Важная задача — приближение матриц матрицами малого ранга:

$$\|A - B\| \to \min, \quad \operatorname{rank} B \leqslant r. \tag{$*$}$$

Эта задача следует идеологии теории аппроксимации: мы стремимся приблизить сложный объект простым с минимальной погрешностью. Какие матрицы являются простыми? Один из возможных ответов: матрицы малого ранга.

Другими словами, (*) это задача наилучшего приближения элемента множеством $\mathcal{R}_r$ матриц ранга не выше r:

$$E(A, \mathcal{R}_r) = \min\{\|A - B\| \colon B \in \mathcal{R}_r\}.$$

Кроме того, можно сформулировать (*) как задачу наилучшего r-членного приближения по словарю одноранговых матриц:

$$E(A, \mathcal{R}_r) = \sigma_r(A, \mathcal{R}_1) = \inf_{\substack{c_1,\ldots,c_r \\ B_1,\ldots,B_r\in\mathcal{R}_1}} \|A - \sum_{k=1}^{r} c_k B_k\|.$$

В данном случае коэффициенты не нужны, но они потребуются, если словарь нормировать.

Пусть $A = U\Sigma V^t$ — сингулярное разложение матрицы A. Ранг матрицы равен количеству ненулевых сингулярных чисел. Логично в качестве приближения взять матрицу $A_r = U\Sigma_r V^t$, в которой первые r сингулярных чисел в Σ остаются как есть, а остальные заменяются на нули.

Теорема 2 (Eckart–Young–Mirsky)**.** *Пусть матричная норма $\|\cdot\|$ унитарно–инвариантна. Тогда*

$$\min_{\operatorname{rank} B \leqslant r} \|A - B\| = \|A - A_r\|.$$

Два важных частных случая:

$$\min_{\operatorname{rank} B \leqslant r} \|A - B\|_F = (\sum_{k>r} \sigma_k^2)^{1/2}$$

(это доказали Eckart–Young) и

$$\min_{\operatorname{rank} B \leqslant r} \|A - B\|_{2\to 2} = \sigma_{r+1}.$$

Пример. Пусть $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ — набор точек. Как построить n-мерное подпространство L, такое что сумма квадратов расстояний от x_i до L минимальна:

$$\min_{\dim L = n} \sum_{i=1}^{N} |x_k - P_L x_k|^2 \to \min.$$

Ясно, что если x_i записать в столбцы матрицы X, то задача сводится к приближению X в норме Фробениуса.

Наконец, отметим, что сингулярное разложение $A = U\Sigma V^t$ равносильно равенству $A = \sum_{i\geqslant 1} \sigma_i u_i v_i^t$, и наилучшее приближение получается "обрубанием хвоста", т.е. $A_r = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$.

Доказательство теоремы — на следующей лекции.