Курс “Методы линейной алгебры в теории приближений”. Лекция 4. Доказательство теоремы Эккарта–Юнга–Мирского. Аппроксимативный ранг.

21 октября 2023 г.

Доказательство теоремы Эккарта–Юнга–Мирского.

Теорема 1 (Eckart–Young–Mirsky)**.** *Пусть матричная норма* $\|\cdot\|$ *унитарно–инвариантна. Тогда*

$$\min_{\operatorname{rank} B \leqslant r} \|A - B\| = \|A - A_r\|.$$

Напомним, что матрица A_r получается “обрубанием хвоста” сингулярного разложения $A = U\Sigma V^t = \sum_{i \geqslant 1} \sigma_i u_i v_i^t$, то есть $A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^t$.

Отметим, что унитарно–инвариантная норма имеет вид $\|A\| = \Phi(\sigma(A))$ для некоторой симметричной векторной нормы Φ. Таким образом,

$$\min_{\operatorname{rank} B \leqslant r} \|A - B\| = \Phi((0, 0, \ldots, 0, \sigma_{r+1}(A), \ldots, \sigma_{\min(m,n)}(A))).$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство для симметричных матриц (интересное само по себе!):

$$\vec{\lambda}(A + B) - \vec{\lambda}(A) \prec \vec{\lambda}(B). \tag{1}$$

(Напомним, что $x \prec y$, если $\sum x_i = \sum y_i$ и для любого k имеем $\sum_{i=1}^k x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^k y_i^*$, где (x_i^*), (y_i^*) — соответствующие неубывающие перестановки.)

Заметим сначала, что $\sum \lambda_i(A+B) - \lambda_i(A) = \sum \lambda_i(B)$ в силу линейности следа. Далее, пусть $i_1, \ldots, i_k$ это координаты в которых величина $\lambda_i(A+B) - \lambda_i(B)$ максимальна. Тогда, в силу неравенства Лидского,

$$\lambda_{i_1}(A+B) + \ldots + \lambda_{i_k}(A+B) \leqslant \lambda_{i_1}(A) + \ldots + \lambda_{i_1}(A) + \lambda_1(B) + \ldots + \lambda_k(B).$$

Перенося собственные значения A в левую часть, мы получаем (1).

Пользуясь леммой из предыдущей лекции, из (1) выводим:

$$\Phi(\vec{\lambda}(A+B) - \vec{\lambda}(A)) \leqslant \Phi(\vec{\lambda}(B)).$$

В случае нормы $\Phi(x) = \|x\|_p$ получаем уже доказанное нами неравенство Wielandt–Hoffman.

Докажем теперь аналогичное неравенство для сингулярных чисел:

$$\Phi(\vec{\sigma}(A+B) - \vec{\sigma}(A)) \leqslant \Phi(\vec{\sigma}(B)). \tag{2}$$

Рассмотрим стандартное вложение $M \mapsto \tilde{M}$ пространства матриц $m \times n$ в пространство симметричных квадратных $(m+n) \times (m+n)$ матриц (см. лекцию 2). Как мы знаем, собственные числа $\tilde{A} + \tilde{B}$ суть нули и $\pm\sigma(A+B)$. Поэтому для любого i число $|\sigma_i(A+B) - \sigma_i(A)|$ равно некоторому $\lambda_{i'}(\tilde{A}+\tilde{B}) - \lambda_{i'}(\tilde{B})$. Значит, для любых $i_1, \ldots, i_k$ по неравенству Лидского имеем

$$\sum_{j=1}^{k} |\sigma_{i_j}(A+B) - \sigma_{i_j}(A)| = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i'_j}(\tilde{A}+\tilde{B}) - \lambda_{i'_j}(\tilde{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\tilde{B}) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(B).$$

Мы доказали (2) для норм Ки–Фаня, значит, и для всех симметричных норм.

Запишем (2) в виде: $\Phi(\vec{\sigma}(A-A')) \geqslant \Phi(v-v')$, где $v = \vec{\sigma}(A)$, $v' = \vec{\sigma}(A')$. Если матрица A' имеет ранг не выше r, то у вектора v' не более r ненулевых координат. В силу монотонности симметричной нормы, для минимизации $\Phi(v-v')$ нужно использовать эти координаты, чтобы занулить r координат v; причём выгодно занулять максимальные координаты. Осталось заметить, что выбор $A' = A_r$ это и делает. $\square$

Стабильный ранг. Ранг матрицы r равен числу ненулевых координат в векторе сингулярных чисел $\sigma = \sigma(A)$. Воспользуемся этим для оценки ранга. Пусть $p < q$, тогда

$$\|\sigma\|_p \leqslant r^{1/p-1/q} \|\sigma\|_q,$$

откуда $r \geqslant (\|\sigma\|_p/\|\sigma\|_q)^{(1/p-1/q)^{-1}}$. При $p = 2$, $q = \infty$ получаем такую оценку:

$$\operatorname{rank} A \geqslant \left(\frac{\|A\|_F}{\|A\|}\right)^2.$$

Эта величина называется стабильным рангом (stable rank). Смысл в том, что она оценивает ранг снизу и является непрерывной величиной (в отличие от ранга). Другое следствие:

$$\operatorname{rank} A \geqslant \left(\frac{\|A\|}{\|A\|_{\mathrm{tr}}}\right)^2.$$

Аппроксимативный ранг. Рассмотрим теперь аппроксимацию в не унитарно–инвариантной норме $\|A\|_{1\to\infty} = \max|A_{i,j}|$, т.е. поэлементное приближение матрицы:

$$E(A, \mathcal{R}_n)_{1\to\infty} = \min\{\|A - B\|_{1\to\infty}\colon \operatorname{rank} B \leqslant n\}.$$

Эквивалентно, мы можем зафиксировать погрешность приближения и минимизировать ранг. Получится определение аппроксимативного ранга

$$\operatorname{rank}_\varepsilon(A) := \min\{\operatorname{rank} B\colon \max|A_{i,j} - B_{i,j}| \leqslant \varepsilon\}.$$

Другой эквивалентный подход — поперечники. Ясно (проверьте!), что поэлементное приближение матрицы соответствует колмогоровскому поперечнику множества её столбцов в ℓ_∞ (или симметризованной выпуклой оболочки этих векторов):

$$E(A, \mathcal{R}_n)_{1\to\infty} = d_n(\{A^1, \dots, A^n\}, \ell_\infty^m) = d_n(\operatorname{conv}\{\pm A^1, \dots, \pm A^n\}, \ell_\infty^m).$$

Пример: единичная матрица. Разберём детально конкретный пример единичной матрицы. Приближение эквивалентно нахождению поперечника множества базисных векторов, или октаэдра:

$$E(\mathrm{Id}_N, \mathcal{R}_n)_{1\to\infty} = d_n(B_1^N, \ell_\infty^N).$$

Будем рассуждать в тех или иных терминах, как удобнее.

Докажем такую оценку сверху для приближения $N \times N$ единичной матрицы матрицми ранга не выше n:

$$E(\mathrm{Id}_N, \mathcal{R}_n)_{1\to\infty} \leqslant C\sqrt{\frac{\log N}{n}}. \tag{3}$$

Доказательство. Приближающую матрицу B возьмём в виде матрицы скалярных произведений маломерных векторов: $B_{i,j} = \frac{1}{n}\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$, где σ_i это случайные последовательности из n знаков (независимых). По неравенству Хефдинга имеем при $i \neq j$:

$$\mathsf{P}(|\frac{1}{n}\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle| \geqslant \varepsilon) = \mathsf{P}(|\sum_{k=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \sigma_j^{(k)}| \geqslant n\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp(-\frac{2n^2\varepsilon^2}{4n}) = 2\exp(-\frac{n\varepsilon^2}{2}).$$

Если величина в правой части неравенства будет меньше $1/N^2$, то найдётся реализация σ_i, при которой $\frac{1}{n}\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle| < \varepsilon$ для всех пар $1 \leqslant i < j \leqslant N$. Для этого нужно взять $\varepsilon \asymp (\log N/n)^{1/2}$, что соответствует (3). $\square$

При n существенно больших $\log N$ можно избавиться от логарифмического множителя в оценке сверху:

$$E(\mathrm{Id}_N, \mathcal{R}_n)_{1\to\infty} \leqslant C(d) n^{-1/2}, \quad \text{если } n^d > N.$$

Доказательство. Достаточно построить $\geqslant N$ единичных векторов размерности n со скалярным произведением по модулю не больше $C(d)n^{-1/2}$.

Возьмём простое число $p \asymp n^{1/2}$ и рассмотрим поле $\mathbb{F}_p$. Графики функций $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ можно отождествить с подмножествами $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ и можно отождествить с вектором размерности p^2 из нулей и единиц. Зафиксируем натуральное d и рассмотрим многочлены P над $\mathbb{F}_p$ степени не выше $2d$, каждому многочлену сопоставим вектор v_P (график). Заметим, что

$$\langle v_P, v_Q \rangle = \#\{x \colon P(x) = Q(x)\} \leqslant 2d,$$

поэтому $\frac{1}{p}\langle v_P, v_Q \rangle$ по модулю не превосходит $\asymp d/p \asymp n^{-1/2}$. При этом количество многочленов не меньше $p^{2d} \geqslant N$. Это даёт нужную оценку. $\square$

Оценка снизу. Докажем, что при $n = o(\log N)$ хорошая аппроксимация невозможна. Тут удобнее рассуждать в терминах поперечников. Итак, пусть базисные вектора $e_1, \ldots, e_N$ приближены в ℓ_∞^N векторами $g_1, \ldots, g_N$ из n-мерного подпространства, и погрешность не более $1/3$. Тогда

$$\|g_i - g_j\|_\infty \geqslant \|e_i - e_j\|_\infty - 2/3 = 1/3.$$

Получается, вектора g_i лежат в ℓ_∞-шаре радиуса $4/3$ и попарно удалены на расстояние не меньше $1/3$, следовательно, их не больше c^n. Значит, $N \leqslant c^n$, ч.т.д.

Общая оценка снизу. Докажем, что

$$E(\mathrm{Id}_N, \mathcal{R}_n)_{1\to\infty} \geqslant \frac{1}{2} n^{-1/2}, \quad n \leqslant N/2. \tag{4}$$

Сведём дело к оценке в ℓ_2. Во-первых, случай (n, N) оценивается через случай $(n, 2n)$. Применим теорему Эккарта–Юнга:

$$E(\mathrm{Id}_{2n}, \mathcal{R}_n)_F = (\sigma_{n+1}(\mathrm{Id}_{2n})^2 + \ldots + \sigma_{2n}(\mathrm{Id}_{2n})^2)^{1/2} = n^{1/2}.$$

Т.к. всего элементов $4n^2$, найдётся элемент, погрешность в котором не менее $\frac{1}{2} n^{-1/2}$.

Идея Глускина. Можно немного усилить оценку снизу в области $n \asymp \log^C N$. Не будем проводить вычисления детально, изложим идею. Идея состоит в **улучшении аппроксимации**. Итак, если матрица B приближает единичную с погрешностью ε, то сначала мы можем добиться того, что $B_{i,i} = 1$ (домножив строки на $1 \pm \varepsilon$). Далее, возведём B поэлементно в степень: $B^{\circ k} := (B_{i,j}^k)$. тогда внедиагональные элементы тоже возведутся в степень будут меньше ε^k. При этом

$$\operatorname{rank} B^{\circ k} \leqslant \binom{\operatorname{rank} B + k - 1}{k}.$$

Дальше остаётся подобрать k и воспользоваться оценкой (4).