

Программа спецкурса

“Методы линейной алгебры в теории аппроксимации и геометрическом функциональном анализе” (год)

“Методы линейной алгебры в теории аппроксимации” (осень 2023)

Спектр эрмитовых матриц. Теорема Куранта–Фишера. Спектральные неравенства. Неравенства Вейля. Минимаксная формула Виландта. Неравенства Лидского и Виландта–Хоффмана.

Сингулярные числа. Связь собственных и сингулярных чисел. SVD (сингулярное разложение). Неравенства для сингулярных чисел.

Нормы матриц. Унитарно–инвариантные нормы, нормы Шаттена. Операторные нормы. Факторизационная γ_2 -норма.

Приближение матрицами малого ранга. Теорема Эккарта–Юнга–Мирского. Аппроксимативный ранг и его связь с γ_2 -нормой. Случай единичной матрицы.

Проблема Кадисона–Зингера. Связь с другими задачами и равносильные переформулировки. Фреймы. Базисы Рисса. Гипотезы Фейхтингера и Вивера.

Свойства спектров одноранговых возмущений матриц. Формула Шермана–Моррисона, следствия.

Теорема Батсона–Спильмана–Сривастава о разрежении билинейных форм.

Следствия теоремы о разрежении. Теорема об ограниченной обратимости.

“Методы линейной алгебры в геометрическом функциональном анализе и теории сложности матриц” (весна 2024)

Коммуникационная сложность. Оценка через ранг.

Вероятностная коммуникация с "публичной" и "приватной" случайностью.

Связь с аппроксимативным рангом.

Оценка разных мер сложности для функций

EQ (равенство) и GE (сравнение).

Связь аппроксимативного ранга и γ_2 -нормы.

Дискрепанс матрицы, оценка сложности через дискрепанс.

Теорема Lovett-a (оценка коммуникационной сложности через ранг).

Неравенства концентрации: Хеффдинга, Бернштейна.

Концентрация для гауссовских величин.

Концентрация в геометрических терминах. Связь с изопериметрическими неравенствами. Концентрация на сфере.

Матричное неравенство Бернштейна. Теорема выпуклости Либа. Матричное неравенство Хинчина.

Литература

Лекции на сайте: <https://approx-lab.math.msu.su>

Т. Тао, *Topics in Random Matrix Theory*. AMS, 2012. (Chapter 1)

Т. Lee, А. Shraibman, “Lower Bounds in Communication Complexity” (2009).

Spielman, Daniel A.; Srivastava, Nikhil An elementary proof of the restricted invertibility theorem. *Israel J. Math.* 190 (2012), 83–91

Marcus, Adam W.; Spielman, Daniel A.; Srivastava, Nikhil Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem. *Ann. of Math.* (2) 182 (2015), no. 1, 327–350

Adam W. Marcus, Daniel A. Spielman, Nikhil Srivastava, Ramanujan Graphs and the Solution of the Kadison-Singer Problem, <https://arxiv.org/abs/1408.4421>

Assaf Naor, Sparse quadratic forms and their geometric applications (after Batson, Spielman and Srivastava), arXiv:1101.4324

P. Casazza, Consequences of the Marcus/Spielman/Srivastava solution to the Kadison-Singer Problem, arXiv:1407.4768

Dan Timotin, The solution to the Kadison-Singer Problem: yet another presentation, arXiv:1501.00464

<https://windowsontheory.org/2013/07/11/discrepancy-graphs-and-the-kadison-singer-conjecture-2/>

<https://windowsontheory.org/2014/04/15/restricted-invertibility-by-interlacing-polynomials/>

<https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v182-n1-p08-s.pdf>

R. Vershynin “High-dimensional probability”, Cambridge University press, 2018