Блок лекций “Объёмы выпуклых тел”
Лекция 1. Мотивация

18.02.2023

Повторение. Выпуклые множества тесно связаны с нормированными пространствами. Рассмотрим эту связь подробнее. Всюду, если не сказано иное, мы будем работать с конечномерными пространствами.

- Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое центрально-симметричное тело (выпуклое тело это ограниченное замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью). Тогда K является единичным шаром в нормированном пространстве $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$; норма задаётся функционалом Минковского

$$\|x\|_K := \inf\{\lambda > 0 \colon x/\lambda \in K\}.$$

  Обратно, шар по любой норме является выпуклым центрально–симметричным телом.

- Сечение $K \cap L$ тела линейным подпространством соответствует переходу к подпространству (с индуцированной нормой).

- Пространства X_1 и X_2 изоморфны, если существует линейное взаимно-однозначное отображение $T \colon X_1 \to X_2$, сохраняющее норму. На языке тел: K_1 эквивалентно K_2, если существует невырожденный линейный оператор, переводящий одно тело в другое: $K_2 = TK_1$. Таким образом, шар эквивалентен эллипсоиду.

- Переход к двойственному подпространству соответствует поляризации (сформулируйте точно, что это значит!)

$$K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in K\}.$$

Отметим, что $K^{\circ\circ} = K$. (Это верно для всех выпуклых замкнутых K, содержащих 0.)

- Чему соответствует проекция выпуклого тела на подпространство?

Объём. Формально, объём Vol множества $K \subset \mathbb{R}^n$ можно определить как меру Лебега этого множества. Однако, вопросы измеримости в выпуклом анализе, по существу, не актуальны — все выпуклые множества, конечно, измеримы, суть дела в вычислении или оценке их объёмов. Поэтому в применении к выпуклым (и другим "простым" множествам) мы говорим об объёме и пишем Vol. (Однако, общие теоремы из теории меры будут нам полезны!)

Утверждение. Пусть $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ невырожденный линейный оператор. Тогда $\mathrm{Vol}(TK) = \mathrm{Vol}(K) \cdot |\det T|$.

Доказательство. Действительно, стандартный куб, порождённый базисными векторами $\{e_1, \dots, e_n\}$, переходит в параллелелипед $\{Te_1, \dots, Te_n\}$. Хорошо известно, что объём этого параллелепипеда равен $|\det T|$. Разбивая тело K на маленькие кубики (приблизительно), и складывая объёмы, получим нужное утверждение. $\square$

Если X — конечномерное линейное пространство, то объём на X можно определить, зафиксировав базис в X и отождествив $X \cong \mathbb{R}^n$. Утверждение показывает, что объём слабо зависит от выбора базиса — любые два объёма отливаются на мультипликативную константу. Простейшие свойства объёма:

- объём не меняется при сдвиге: $\mathrm{Vol}(K+x) = \mathrm{Vol}(K)$ и под действием линейных операторов с $|\det T| = 1$;
- объём n-однороден: $\mathrm{Vol}(rK) = r^n \,\mathrm{Vol}(K)$, где $n := \dim X$.

Объём — очень удобный функционал, позволяющий в ряде ситуаций работать со сложными многомерными выпуклыми множествами, "ухватить" какие-то их свойства. Мы приведём два важных примера использования объёмов.

Пример 1: энтропия. Пусть X — нормированное пространство, $K \subset X$, $\varepsilon > 0$.

Определение. Через $N_\varepsilon(K, X)$ обозначается размер минимальной ε-сети для K в пространстве X, т.е. минимальное количество N точек $x_1, \dots, x_N \in X$, таких что любая точка из K находится на расстоянии не более ε от одной из x_i — другими словами,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon).$$

($B(x, r)$ это замкнутый шар с центром в x радиуса r.)

ε-энтропией называют двоичный логарифм числа $N_\varepsilon(K, X)$. Энтропия показывает, сколько бит нужно использовать, чтобы закодировать элементы K битовыми строками с погрешностью $\leqslant \varepsilon$.

Определение. Через $P_\varepsilon(K, X)$ обозначается размер максимальной ε-упаковки в K, т.е. максимальное количество P точек $x_1, \dots, x_P \in K$ с попарными расстояниями больше ε:

$$\min_{1 \leqslant i < j \leqslant P} \|x_i - x_j\|_X > \varepsilon.$$

Часто пишут просто $P_\varepsilon(K)$, т.к. эта величина на зависит от объемлющего пространства, только от метрики на K.

Утверждение. $P_{2\varepsilon}(K, X) \leqslant N_\varepsilon(K, X) \leqslant P_\varepsilon(K, X)$.

Доказательство. Рассмотрим максимальную ε-упаковку. Она является ε-сетью для K, так как иначе можно было бы её увеличить. Это доказывает правое неравенство.

Рассмотрим максимальную 2ε-упаковку и произвольную ε-сеть. Каждой точке упаковки соответствует ближайшая точка ε-сети, причём разным точкам упаковки — разные точки в сети (иначе расстояние будет $\leqslant 2\varepsilon$). Отсюда следует левое неравенство. □

Утверждение.

$$\frac{\mathrm{Vol}(K)}{\mathrm{Vol}(\varepsilon B_X)} \leqslant N_\varepsilon(K, X) \leqslant P_\varepsilon(K, X) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(K + \frac{\varepsilon}{2} B_X)}{\mathrm{Vol}(\frac{\varepsilon}{2} B_X)}.$$

(Обозначения: B_X есть единичный шар X; $K + L$ это сумма по Минковскому, т.е. множество $\{x + y \colon x \in K,\ y \in L\}$.)

Доказательство. Докажем левое неравенство. Если K покрывается N шарами радиуса ε, то мы можем оценить его объём: $\mathrm{Vol}(K) \leqslant N \,\mathrm{Vol}(\varepsilon B_X)$.

Докажем правое неравенство. Рассмотрим $\varepsilon/2$-окрестности точек максимальной ε-упаковки. Они не пересекаются и лежат в $\varepsilon/2$-окрестности K, поэтому объём этой окрестности не больше $P_\varepsilon \cdot \mathrm{Vol}(\frac{\varepsilon}{2} B_X)$. □

Покажите, что в бесконечномерном пространстве нельзя ввести объём, инвариантный относительно сдвигов.

Следствие. Пусть $n := \dim X$. Тогда:

$$(1/\varepsilon)^n \leqslant N_\varepsilon(B_X, X) \leqslant P_\varepsilon(B_X, X) \leqslant (2/\varepsilon + 1)^n.$$

Пример 2: теорема Джона. Норма называется евклидовой, если она имеет вид $\|x\| = (\langle x, \rangle x)^{1/2}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — некоторое скалярное произведение. Другими словами, норма евклидова, если она изоморфна стандартной евклидовой норме в $\mathbb{R}^n$.

Эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ это шар в некоторой евклидовой норме на $\mathbb{R}^n$, то есть линейный образ стандартного шара: $\mathcal{E} = TB_2^n$. Используя, например, сингулярное разложение $T = U\Sigma V^t$, мы видим, что $\mathcal{E}$ в подходящем ортонормированном базисе задаётся стандартным уравнением

$$\sum_{i=1}^n \frac{\langle x, \varphi_i \rangle^2}{a_i^2} \leqslant 1.$$

Найдите объём такого эллипсоида.

Теорема 1 (Fritz John)**.** . *Пусть X — произвольное n-мерное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Тогда на X существует евклидова норма $|\cdot|$, отличающаяся от исходной нормы не более чем в $\sqrt{n}$ раз:*

$$|x| \leqslant \|x\| \leqslant n^{1/2}|x|, \quad \forall x \in X.$$

Остаток лекции посвящён доказательству теоремы.

Отметим, что множитель $n^{1/2}$ можно записать по-другому; в общем виде неравенство имеет вид $a|x| \leqslant \|x\| \leqslant b|x|$, где $b/a = n^{1/2}$. Мы будем доказывать неравенство $n^{-1/2}|x| \leqslant \|x\| \leqslant |x|$.

Переходя от норм к шарам, приходим к следующему утверждению: если $K \subset \mathbb{R}^n$ выпуклое центрально–симметричное тело, то существует эллипсоид $\mathcal{E}$, такой что $\mathcal{E} \subset K \subset n^{1/2}\mathcal{E}$.

Основная идея заключается в том, чтобы в качестве $\mathcal{E}$ взять *эллипсоид максимального объёма*, содержащийся в K. Его называют эллипсоидом Джона. Существование такого эллипсоида стандартным образом следует из компактности: он задаётся конечным числом параметров, объём непрерывно от них зависит, множество параметров компактно (почему?). (На самом деле эллипсоид Джона единственен, но мы этого не доказываем.)

Мы уже говорили, что в контексте нормированных пространств считаем эквивалентными тела K и TK, где T — линейный оператор. Часто для заданного тела K подбирают T так, чтобы TK обладал удобными свойствами и работают далее с TK. В нашем случае мы возьмём T исходя из условия $T\mathcal{E} = B_2^n$. Другими словами, мы будем считать, что эллипсоид Джона для нашего тела это обычный евклидов шар. (Это называется "положением Джона" для K.)

Итак, известно, что эллипсоид максимального объёма в K это B_2^n, нужно доказать, что $K \subset n^{1/2} B_2^n$. Доказательство от противного: предположим, что нашлась точка $x_0 \in K$, $|x_0| > n^{1/2}$, докажем, что шар можно "сплющить" в направлении x_0 так, чтобы он по-прежнему был в K, но увеличил свой объём.

Нарисуем двумерное сечение K плоскостью, содержащей x_0 (см. рис.).

Сечение K содержит круг и точку x_0. Ясно, что если полуоси $a > 1$, $b < 1$ таковы, что эллипс касается той же касательной, то соответствующий эллипсоид лежит в K. Растягивая этот эллипс и применяя школьную геометрию (Проверьте! Найдите t и $t' = t \cdot a/b$.), можно получить соотношение между a и b:

$$a^2 = |x_0|^2(1 - b^2) + b^2.$$

Выберем $b^2 = 1 - \varepsilon$ с малым ε. Тогда $a^2 = 1 + (|x_0|^2 - 1)\varepsilon$. При "сплющивании" получим объём $ab^{n-1} \operatorname{Vol}(B_2^n)$. Он больше единицы при малых $\varepsilon > 0$, так как

$$a^2(b^2)^{n-1} = 1 + (|x_0|^2 - n)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Получили противоречие.

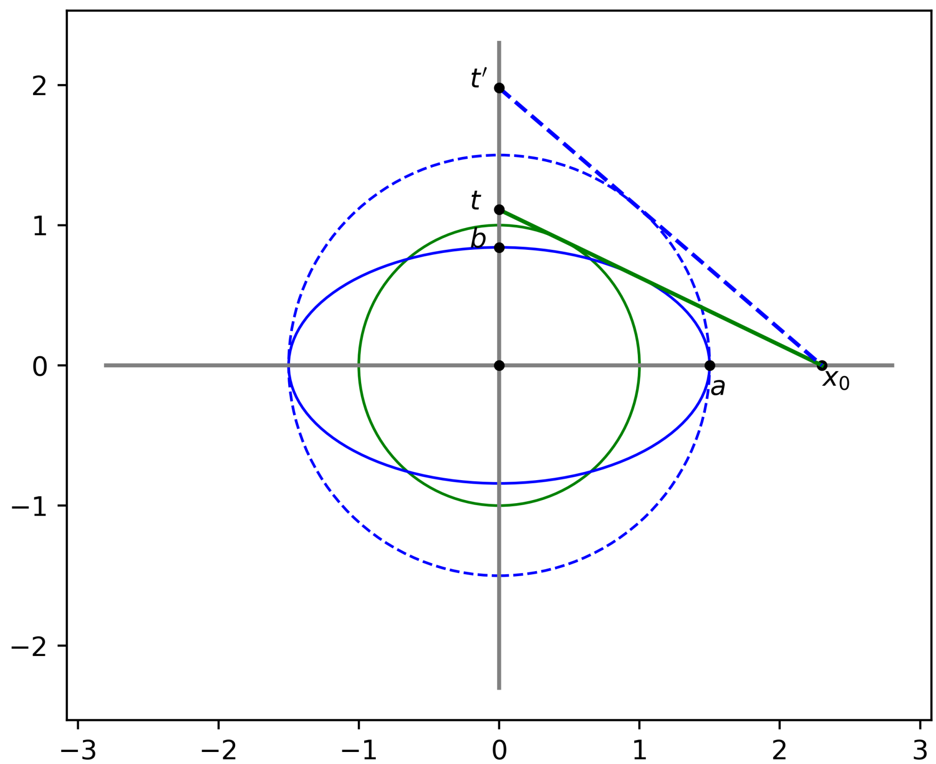

Рис. 1: Двумерное сечение K