Блок лекций “Объёмы выпуклых тел”
Лекция 2. Основные инструменты

04.03.2023

Начнём с очевидного равенства: $\mathrm{Vol}_n K = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)\,dx$, где $\mathbf{1}_K$ это характеристическая функция K. С одной стороны, интеграл определяется по мере и мера является более базовым понятием. С другой стороны, интеграл обладает рядом удобных свойств (например, линейность) и объёмы во многих случаях можно оценить с помощью интегралов различных подходящих функций (не обязательно характеристических). Мы увидим примеры этого.

Напомним некоторые полезные факты из теории меры, которые нам пригодятся.

Теорема Фубини. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, разделим координаты $x_1, \dots, x_n$ на две группы:

$$x' = (x_1, \dots, x_k), \quad x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Обозначим через $f_{x'}$ ограничение функции f на множество координат с фиксированным x', т.е. $f_{x'}(x'') := f(x', x'')$.

Теорема. Если $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, то для почти всех x' функция $f_{x'}$ суммируема и

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_{x'}(x'')\,dx'' \right) dx'.$$

Следствие. Обозначим $K_{x'} := \{x''\colon (x', x'') \in K\}$, т.е. это сечение тела K. Тогда

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathrm{Vol}_{n-k}(K_{x'})\,dx'.$$

Следствие. Если у двух тел совпадают объёмы сечений: $\mathrm{Vol}_{n-k}(K_{x'}) = \mathrm{Vol}_{n-k}(L_{x'})$ для всех x', то и сами объёмы равны: $\mathrm{Vol}_n K = \mathrm{Vol}_n L$.

Теорема Фубини доказывается в курсе функционального анализа.

Замена переменной в интеграле. Мы помним, что линейные отображения меняют объём в фиксированное число раз: $\mathrm{Vol}\, TK = \mathrm{Vol}\, K \cdot |\det T|$. Приведём обобщение этой формулы.

Теорема. Если $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое множество, отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ инъективно и C^1-гладко, то для любого измеримого множества $A \subset U$ и борелевской функции $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{F(A)} g(x)\, dx = \int_A g(F(u))|\det F'(u)|\, du.$$

В частности,

$$\mathrm{Vol}\, F(A) = \int_A |\det F'(u)|\, du.$$

Приведём схему доказательства для объёмов. Сначала рассматривается случай, когда A — куб. Его можно разбить на маленькие кубики A_i. Тогда $\mathrm{Vol}\, F(A_i) \approx \mathrm{Vol}\, A \cdot |\det F'(x_i)|$, $x_i \in A_i$. Суммируя по i, получим интегральную сумму для интеграла от $|\det F'|$. Далее нужно перейти к пределу. (Формальное доказательство см., например, в книге Богачёва “Теория меры”, 1-й том, §3.7.)

Интеграл на сфере. Теория меры хорошо развита в $\mathbb{R}^n$. С поверхностями дело обстоит сложнее. Есть несколько подходов к определению меры (и интеграла) на сложных множествах типа поверхностей.

1. Мера Хаусдорфа. Пусть A — некоторое множество (в $\mathbb{R}^n$ или произвольном метрическом пространстве). Зафиксируем $d \geqslant 0$ и положим

$$H^d_\delta(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\, C_i)^d \colon A \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i,\ \mathrm{diam}\, C_i \leqslant \delta\},$$

$$H^d(A) := \lim_{\delta \to 0} H^d_\delta(A).$$

Интуиция тут следующая: если мы хотим измерить длину кривой, то выбираем $d = 1$, покрываем кривую N кругами диаметра δ и вычисляем $N \cdot \delta$; далее стремим $\delta \to 0$. Если мы измеряем площадь фигуры, то так же покрываем её кругами, но смотрим на величину $N\delta^2$, т.е. $d = 2$. Для любого множества есть такое d, что $H^{d+\varepsilon}(A) = 0\ \forall\varepsilon > 0$ и $H^{d-\varepsilon}(A) = \infty\ \forall\varepsilon > 0$. Это, “правильное” d называется “размерностью Хаусдорфа” множества A, а величина $H^d(A)$ — d-мерной мерой Хаусдорфа A.

Плюсы этого подхода в том, что он весьма общий. Мера Хаусдорфа не является мерой в обычном смысле, она не сигма-аддитивна (так как определена для любых множеств) и принимает бесконечные значения. Однако, скажем, на классе борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ мера H^d сигма-аддитивна. На классе борелевских подмножеств сферы S^{n-1} мера H^{n-1} становится полноценной мерой. Отметим, что $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа сферы не равна её площади в обычном понимании (другая нормировка).

2. Мера Хаара. Если G — группа, то возникает понятие инвариантной меры: такой, что $\mu(A) = \mu(gA)$ для любого $g \in G$ и $A \subset G$. На любой локально–компактной группе существует и единственна (с точностью до множителя) такая инвариантная мера. Эта мера называется *мерой Хаара*. Типичными примерами таких групп являются матричные группы $O(n)$, $SL(n)$ и т.п.

Если G действует на X (например, группа вращений $O(n)$ действует на сферу S^{n-1}), то можно перенести на X инвариантную меру с G. Зафиксируем произвольно $x_0 \in X$ и положим

$$\mu_X(A) := \mu_G(\{g\colon gx_0 \in A\}).$$

Определение не зависит от выбора x_0. (Докажите! Проверьте, что μ_X инвариантна.) Так мы получим на сфере меру, инвариантную относительно вращений.

Минус этого подхода в том, что он работает только для множеств с богатой структурой.

3. C^1-гладкие многообразия и интегрирование дифференциальных форм. Для гладких многообразий $M \subset \mathbb{R}^n$, т.е. локально представимых в виде образа $\mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$, определяются интегралы от дифференциальных форм, и площадь как интеграл от формы объёма. По сути, мы приближаем многообразие кусочками из касательных пространств.

Для сферы работают все три подхода! Мы не будем доказывать их эквивалентность.

На самой сфере удобно будет использовать нормированную (вероятностную) меру. Итак, на сфере S^{n-1} однозначно определена вероятностная инвариантная относительно вращений мера σ, т.е.

$$\sigma(S^{n-1}) = 1, \quad \sigma(UA) = \sigma(A) \text{ для } U \in O(n),\ A \subset S^{n-1}.$$

Другими словами, σ это распределение “равномерной случайной точки на сфере”.

Площадь сферы мы вычислим чуть позже.

Специальные функции. Нам потребуются некоторые специальные функции.

Гамма-функция $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$. Напомним свойства Γ:

- $\Gamma(\alpha)$ определена при $\alpha > 0$ (не только; но другие значения нам пока не понадобятся) и положительна;
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$; тем самым, $\Gamma(n+1) = n!$ для натуральных n; (Вычислите $\Gamma(n+1/2)$.)
- $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin(\pi\alpha)$; следовательно, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Мы будем пользоваться асимптотикой для гамма-функции (формула Стирлинга):

$$\Gamma(\alpha+1) = \sqrt{2\pi\alpha}(\alpha/e)^\alpha(1+o(1)), \quad \alpha \to \infty.$$

Бета-функция $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$. Определена при $\alpha, \beta > 0$ и верна формула

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Примеры вычисления объёма. Напомним, что ℓ_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, это пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

и $\|x\|_\infty := \max |x_k|$.

Через B_p^n обозначаем единичный шар ℓ_p^n.

Через $|x|$ обозначается евклидова норма ($p = 2$).

Куб. При $p = \infty$ получаем куб B^n_∞ с ребром 2. Очевидно, $\mathrm{Vol}(B^n_\infty) = 2^n$.

Конус CK над множеством K это множество вида $\mathrm{conv}\{x^\circ, K\}$. Предполагается, что K лежит в некоторой гиперплоскости, а x° в ней не лежит.

Докажем, что $\mathrm{Vol}_n(CK) = \frac{h}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(K)$, где h — высота конуса, т.е. расстояние от x° до гиперплоскости, содержащей K. Действительно, пусть $K \subset \{x\colon x_n = 0\}$, $x^\circ = (0, h)$. Тогда по теореме Фубини

$$\mathrm{Vol}_n K = \int_{0^h} \mathrm{Vol}_{n-1}(CK \cap \{x_n = t\})\, dt.$$

Нетрудно видеть, что $CK \cap \{x_n = t\}$ подобно множеству K с коэффициентом $(h-t)/h$, отсюда

$$\mathrm{Vol}_n CK = \mathrm{Vol}_{n-1} K \cdot \int_0^h ((h-t)/h)^{n-1}\, dt = \\ \mathrm{Vol}_{n-1} K \cdot \int_0^h (t/h)^{n-1}\, dt = (h/n)\, \mathrm{Vol}_{n-1} K.$$

Площадь октаэдра.

Октаэдр $B^n_1 = \{x\colon \sum |x_k| \leqslant 1\}$ разбивается на 2^n одинаковых частей, одна из которых — $\{x\colon x_k \geqslant 0,\ \sum x_k \leqslant 1\}$. Найдём объём одной этой части. Заметим, что это конус над аналогичным $(n-1)$-мерным множеством. По индукции получаем, что его объём равен $1/n!$. Следовательно, $\mathrm{Vol}(B^n_1) = 2^n/n!$.

Площадь сферы.

Разобьём сферу на малые части S_i. Возьмём в S_i точку x_i и спроектируем S_i на гиперплоскость, касательную к сфере в точке x_i; получим области $\widetilde{S}_i$. В силу гладкости сферы, $\mathrm{area}(S_i) = \mathrm{area}(\widetilde{S}_i)(1 + o(1))$ (при $\max \mathrm{diam}\, S_i \to 0$). При этом, объём конуса над $\widetilde{S}_i$ с центром в нуле равен $\mathrm{Vol}\, C\widetilde{S}_i = \frac{1}{n}\, \mathrm{area}\, \widetilde{S}_i$. Отсюда

$$(1 + o(1))\, \mathrm{Vol}\, B^n_2 = \sum \mathrm{Vol}\, C\widetilde{S}_i = \frac{1}{n} \sum \mathrm{area}\, \widetilde{S}_i = \\ \frac{1 + o(1)}{n} \sum \mathrm{area}\, S_i = \frac{1 + o(1)}{n}\, \mathrm{area}(S^{n-1}).$$

Переходя к пределу при $\max \mathrm{diam}\, S_i \to 0$, получим равенство $\mathrm{area}(S^{n-1}) = n\, \mathrm{Vol}(B^n_2)$.

Сферическое интегрирование.

В дальнейшем будем использовать обозначение $v_n := \mathrm{Vol}(B_2^n)$. Итак, $\mathrm{area}(S^{n-1}) = nv_n$.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — "хорошая" функция (скажем, непрерывная и достаточно быстро стремящаяся к нулю). Можно "нарезать" интеграл по пространству на сферические слои. Приведём схему доказательства следующей формулы:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = nv_n \int_0^\infty r^{n-1} \left\{ \int_{S^{n-1}} f(r\theta)\,d\sigma(\theta) \right\} dr. \tag{1}$$

Что здесь написано? Интеграл

$$\int_{S^{n-1}} f(r\theta)\,d\sigma(\theta)$$

это "среднее значение" функции f на сфере радиуса r. А множитель $nv_n r^{n-1}$ это площадь сферического слоя радиуса r.

Итак, если взять достаточно большой R и разбить $[0, R]$ на малые отрезки $[r_i, r_{i+1}]$, то интеграл по слою $B_{r_i,r_{i+1}} = \{x\colon r_i \leqslant |x| \leqslant r_{i+1}\}$ равен

$$\int_{r_i\leqslant|x|\leqslant r_{i+1}} f(x)\,dx \approx \mathrm{Vol}(B_{r_i,r_{i+1}}) \cdot \int_{S^{r-1}} f(r_i\theta)\,d\sigma(\theta) =$$

$$(r_{i+1}^n - r_i^n)v_n \int_{S^{r-1}} f(r_i\theta)\,d\sigma(\theta).$$

Обозначим $\Delta_i = r_{i+1} - r_i$. Имеем $r_{i+1}^n - r_i^n = r_i^n((1+\Delta_i/r_i)^n - 1) \approx nr_i^{n-1}\Delta_i$. Суммируя, получаем

$$\int_{|x|\leqslant R} f(x)\,dx \approx nv_n \sum r_i^{n-1}\Delta_i \int_{S^{r-1}} f(r_i\theta)\,d\sigma(\theta).$$

Здесь мы видим интегральную сумму для интеграла (1). Остаётся перейти к пределу при $\max \Delta_i \to 0$ и $R \to \infty$.

Объём шара. Найдём теперь v_n. Применим теперь (1) для $f(x) = \exp(-|x|^2)$. Поскольку функция раскладывается в произведение $\prod_{k=1}^n \exp(-x_k^2)$, то по теореме Фубини (проверьте!) имеем $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \prod_{k=1}^n (\int_{\mathbb{R}} \exp(-x_k^2)\,dx) = (\sqrt{2\pi})^n$.

С другой стороны, при фиксированном r на сфере радиуса r функция постоянна, поэтому и её среднее равно $\exp(-r^2)$. В правой части (1) получаем интеграл

$$nv_n \int_0^\infty r^{n-1} \exp(-r^2)\, dr.$$

Делая замену $r^2 = u$ и сводя интеграл к гамма-функции, окончательно найдём

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Применяя формулу Стирлинга, найдём радиус R_n шара единичного объёма. Имеем $v_n R_n^n = 1$,

$$R_n = v_n^{-1/n} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}.$$