# Блок лекций “Объёмы выпуклых тел”
# Лекция 3. Неравенство Брунна–Минковского

11.03.2023

## 1 Неравенство Брунна–Минковского

Первая часть следует лекции №5 Болла, см. [1].

Пусть $K$ — выпуклое тело на плоскости. Нетрудно показать, что функция $f(x) := \operatorname{Vol}_1(K_x)$, где $K_x$ это сечение $K$ прямой $\{(x,y)\colon y \in \mathbb{R}\}$, является вогнутой: $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$. (Докажите это непосредственно.).

В трёхмерном случае это уже не так. Рассмотрим, скажем, конус с осью, параллельной $Ox$. Тогда функция $\operatorname{Vol}_2(K_x)$ квадратична и не является вогнутой! Однако, $\sqrt{\operatorname{Vol}_2(K_x)}$ линейна (и вогнута). Оказывается, вогнутость имеет место в следующем виде:

**Теорема 1** (Brunn). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ выпуклое тело, тогда функция $x \mapsto \operatorname{Vol}_{n-1}(K_x)^{\frac{1}{n-1}}$ вогнута.*

**Следствие:** если $K$ центрально–симметрично (относительно нуля), то среди всех сечений $K$ гиперплоскостями, параллельными данной, максимальный объём имеет сечение, проходящее через ноль. В том числе, сечение максимального объёма содержит ноль. Верно ли это для сечений меньшей, чем $n-1$, размерности?

Попробуем доказать теорему Брунна. Рассмотрим три сечения: $K_t$, $K_s$, $K_r$, где $t = (1-\lambda)s + \lambda r$, $\lambda \in (0,1)$. Нам нужно доказать, что $\operatorname{Vol}(K_t)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (1-\lambda)\operatorname{Vol}(K_s)^{\frac{1}{n-1}} + \lambda \operatorname{Vol}(K_r)^{\frac{1}{n-1}}$. Что мы знаем про эти три множества? В силу выпуклости $K$, имеем[1] $K_t \supset (1-\lambda)K_s + \lambda K_r$ (проверьте!). На самом деле, больше ничего утверждать и нельзя. Дело сводится к следующему неравенству: $\mathrm{Vol}((1-\lambda)K+\lambda L)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (1-\lambda)\mathrm{Vol}(K)^{\frac{1}{n-1}} + \lambda\mathrm{Vol}(L)^{\frac{1}{n-1}}$.

Оказывается, нужное нам неравенство справедливо и в более общем случае. Сформулируем его для $\mathbb{R}^n$ вместо $\mathbb{R}^{n-1}$.

**Теорема 2** (Неравенство Брунна–Минковского(–Люстерника))**.** *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^n$ непустые компактные множества, $\lambda \in (0,1)$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}((1-\lambda)K+\lambda L)^{\frac{1}{n}} \geqslant (1-\lambda)\mathrm{Vol}(K)^{\frac{1}{n}} + \lambda\mathrm{Vol}(L)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Другими словами, функция $\mathrm{Vol}_n(\cdot)^{1/n}$ вогнута по отношению к сложению Минковского. Поскольку эта функция однородна, т.е. $\mathrm{Vol}(\lambda K)^{1/n} = \lambda\mathrm{Vol}(K)^{1/n}$, неравенство (1) равносильно

$$\mathrm{Vol}(K+L)^{\frac{1}{n}} \geqslant \mathrm{Vol}(K)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(L)^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, $(1-\lambda)u+\lambda v \geqslant u^{1-\lambda}v^{\lambda}$. Поэтому из (1) вытекает неравенство Брунна–Минковского в мультипликативной форме:

$$\mathrm{Vol}((1-\lambda)K+\lambda L) \geqslant \mathrm{Vol}(K)^{(1-\lambda)}\mathrm{Vol}(L)^{\lambda}. \tag{3}$$

Здесь нет зависимости от размерности $n$ и можно не требовать непустоту $K, L$. Можно сформулировать так: функция $\log\mathrm{Vol}(\cdot)$ вогнута.

Нетрудно доказать, что если (3) справедливо для всех $K$, $L$, $\lambda$, то справедливо и неравенство в аддитивной форме (1), (2).

Применять неравенство Брунна–Минковского иногда удобнее в мультипликативной форме, иногда — в аддитивной (мы увидим разные примеры).

Удобнее доказывать (3) для функций, а не множеств. Пусть $m(x) = \mathbf{1}(1-\lambda)K+\lambda L(x)$, $f(x) = \mathbf{1}_K(x)$, $g(x) = \mathbf{1}_L(x)$ — соответствующие характеристические функции. Заметим, что они связаны неравенством $m((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda}g(x)^{\lambda}$. Это и будет условием на функции.

**Теорема 3** (Prekopa–Leindler)**.** *Пусть $m, f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неотрицательны, измеримы, $\lambda \in (0,1)$ и выполнено соотношение*

$$m((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{$*$}$$

*Тогда $\int m \geqslant (\int f)^{1-\lambda}(\int g)^{\lambda}$.*

[1] Напомим, что $K+L$ обозначает сумму по Минковскому, $\{x+y\colon x \in K,\ y \in L\}$.

Ясно, что теорема Брунна–Минковского (а с ней и т.Брунна) вытекают из последней теоремы. Докажем её.

*Доказательство.* Индукция по $n$. При $n = 1$ сначала докажем непосредственно неравенство Брунна–Минковского: $\mathrm{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant (1-\lambda)\mathrm{Vol}_1(A) + \lambda \mathrm{Vol}_1(B)$ для непустых $A$, $B$. Множества $A$ и $B$ можно сдвигать, длины от этого не меняются. Сдвинем их так, что $\max A = 0$ и $\min B = 0$. Тогда $(1-\lambda)A + \lambda B$ содержит два непересекающихся (почти) множества $(1-\lambda)A$ и $\lambda B$ и поэтому его мера не меньше суммы их мер. Перейдём к функциям. Можно считать, что $f$ и $g$ существенно ограничены (Почему?). Нормируем: $\sup f = \sup g = 1$. Мы имеем

$$\int m = \int_0^\infty \mu\{m \geqslant t\}\, dt \geqslant \int_0^1 \{m \geqslant t\} dt.$$

Заметим, что $\{m \geqslant t\} \supset (1-\lambda)\{f \geqslant t\} + \lambda\{g \geqslant t\}$ в силу предположения (*) и оба множества справа непусты при $t \in (0,1)$. Применим уже доказанное неравенство для мер множеств и перейдём к интегралам:

$$\int m \geqslant \int_0^1 \{m \geqslant t\} dt \geqslant (1-\lambda)\int_0^1 \mu\{f \geqslant t\}\, dt + \lambda \int_0^1 \mu\{g \geqslant t\}\, dt =$$
$$= (1-\lambda)\int f + \lambda \int g \geqslant (\int f)^{1-\lambda} + (\int g)^\lambda.$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход $n-1 \mapsto n$. Рассмотрим функции одной переменной

$$M(x_1) := \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

и аналогично $F$, $G$. Докажем, что для $M, F, G$ выполнено условие (*) и тогда из доказанного одномерного случая мы получим

$$\int m = \int M \geqslant (\int F)^{1-\lambda} (\int G)^\lambda = (\int f)^{1-\lambda} (\int g)^\lambda.$$

Что представляет собой условие (*) для $M, F, G$? Зафиксируем $r = (1-\lambda)s + \lambda t$ и проверим, что $M(r) \geqslant F(s)^{1-\lambda} G(t)^\lambda$. Заметим, что для функций $(n-1)$-й переменной $m(r, x_2, \ldots, x_n)$, $f(s, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(t, x_2, \ldots, x_n)$ условие (*) следует из (*) для исходных $m, f, g$. Поэтому для них выполняется соотношение между интегралами. А это и есть (*) для $M, F, G$. □

Замечание. Поскольку мы использовали только свойства интеграла Лебега, неравенство Брунна–Минковского верно в более общем случае, а именно, для любых измеримых (по Лебегу) $K$ и $L$, таких что $(1-\lambda)K+\lambda L$ тоже измеримо (последнее условие существенно — есть примеры измеримых множеств, сумма которых не измерима).

## 2 Следствия

Приведём два следствия доказанного неравенства.

**1.** Зафиксируем числа $v, \delta > 0$ и рассмотрим всевозможные тела $K$ (компактные, но не обязательно выпуклые) объёма $\mathrm{Vol}(K) = v$. Для какого $K$ объём $\delta$-окрестности $K$ минимален?

$\delta$-окрестность это просто $K + \delta B_2^n$. Пусть $v = \mathrm{Vol}(K) = \mathrm{Vol}(rB_2^n)$, тогда по неравенству Брунна–Минковского имеем

$$\mathrm{Vol}(K + \delta B_2^n)^{1/n} \geqslant \mathrm{Vol}(K)^{1/n} + \delta \,\mathrm{Vol}(B_2^n)^{1/n} = (r+\delta)\,\mathrm{Vol}(B_2^n)^{1/n}.$$

Ясно, что в случае, когда $K$ это шар $rB_2^n$, достигается равенство. Таким образом, *при фиксированном объёме $K$ объём $\delta$-окрестности минимален в случае шара.*

**2.** Теорема Борелла. Пусть $K$— выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ единичного объёма; $A$ — выпуклое замкнутое и симметричное множество, такое что $\mathrm{Vol}(K \cap A) = \beta > 1/2$. Тогда для любого $t > 1$ имеем

$$\mathrm{Vol}(K \cap tA) \geqslant 1 - \beta((1-\beta)/\beta)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Другими словами, если нам удалось "поймать" больше половины объёма множеством $A$ (например, полосой $|\langle x, u\rangle \leqslant 1)$, то почти весь объём будет находиться в "раздутии" $A$ (например, $|\langle x, u\rangle \leqslant t)$.

*Доказательство.* Через $A^c$ обозначаем дополнение, т.е., $\mathbb{R}^n \setminus A$. Докажем, что

$$A^c \supset \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A.$$

От противного: если нашёлся $a \in A$ вида $a = \frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}a_1$, где $y \notin tA$, $a_1 \in A$, то тогда

$$\frac{1}{t}y = \frac{t+1}{2t}a + \frac{t-1}{2t}(-a_1) \in A$$

в силу выпуклости, что приводит к противоречию. Поскольку $K$ выпукло, то

$$A^c \cap K \supset \frac{2}{t+1}((tA)^c \cap K) + \frac{t-1}{t+1}(A \cap K).$$

Из неравенства Брунна–Минковского:

$$1-\beta = \mathrm{Vol}(A^c \cap K) \geqslant \mathrm{Vol}((tA)^c \cap K)^{\frac{2}{t+1}} \mathrm{Vol}(A \cap K)^{\frac{t-1}{t+1}} = \mathrm{Vol}((tA)^c \cap K)^{\frac{2}{t+1}} \beta^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Отсюда всё следует. $\square$

# Список литературы


[1] K. Ball, “An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry”.

[2] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas, B.-H. Vristiou, *Geometry of Isotropic Convex Bodies.*