Блок лекций “Объёмы выпуклых тел”
Лекция 4. Смешанные объёмы

18.03.2023

Рассмотрим t-окрестность треугольника и её площадь. Видно, что она складывается из самого треугольника, трёх прямоугольников ширины t и трёх круговых секторов (суммарный угол $6\pi - 6\cdot\frac{\pi}{2} - \pi = 2\pi$), откуда

$$\mathrm{Vol}_2(\Delta + tB_2^2) = \mathrm{Vol}_2(\Delta) + tP(\Delta) + \pi t^2.$$

(P — периметр.)

Оказывается, это равенство обобщается на произвольные выпуклые тела и произвольные размерности. Для обоснования этого мы будем использовать весьма общее понятие — *смешанный объём* $V(K_1, \dots, K_n)$.

Теорема 1 (Минковский)**.** *Существует и единственна функция $V(K_1, \dots, K_n)$, аргументы которой — непустые выпуклые компакты $K_1, \dots, K_n \subset \mathbb{R}^n$, со следующими свойствами:*

1. *на диагонали это просто объём: $V(K, K, \dots, K) = \mathrm{Vol}_n(K)$*
2. *симметричность: $V(K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_n}) = V(K_1, \dots, K_n)$*
3. *аддитивность и положительная однородность: для $\alpha, \beta \geqslant 0$*

   $$V(\alpha K + \beta L, K_2, \dots, K_n) = \alpha V(K, K_2, \dots, K_n) + \beta V(L, K_2, \dots, K_n)$$

4. *неотрицательность: $V \geqslant 0$, и монотонность: если $K \subset L$, то $V(K, K_2, \dots, K_n) \leqslant V(L, K_2, \dots, K_n)$*
5. *инвариантность относительно сдвига: $V(K_1 + x_1, \dots, K_n + x_n) = V(K_1, \dots, K_n)$*

6. *непрерывность: если* $K_1^j \to K_1, \ldots, K_n^j \to K_n$ *(*$j \to \infty$*), то* $V(K_1^j, \ldots, K_n^j) \to V(K_1, \ldots, K_n)$

Последнее свойство требует пояснения. Имеется в виду непрерывность по метрике Хаусдорфа. Она определена между непустыми компактными подмножествами метрического пространства:

$$d(A, B) = \max\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\},$$

где расстояние от точки до множества это $d(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y)$.

Следствия. Для любых $K_1, \ldots, K_m$ (количество уже может не совпадать с размерностью) и любых $t_1, \ldots, t_m \geqslant 0$ имеем

$$\operatorname{Vol}(t_1 K_1 + \ldots + t_m K_m) = V(\sum_{i=1}^m t_i K_i, \ldots, \sum_{i=1}^m t_i K_i) = \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_n=1}^m t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_n} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}). \quad (1)$$

Т.е. этот объём — однородный многочлен степени n. Заметим, что многие слагаемые в нём повторяются. Например, на плоскости:

$$\operatorname{Vol}(t_1 K_1 + t_2 K_2) = t_1^2 V(K_1, K_1) + t_1 t_2 V(K_1, K_2) + t_2 t_1 V(K_2, K_1) + t_2^2 V(K_2, K_2) = t_1^2 \operatorname{Vol}(K_1) + 2 t_1 t_2 \operatorname{Vol}(K_1, K_2) + t_2^2 \operatorname{Vol}(K_2).$$

Отсюда можно получить формулу смешанного объёма на плоскости.

Из формулы (1) следует, что $\operatorname{Vol}(K + tB_2^n)$ является многочленом степени n:

$$\operatorname{Vol}(K + tB_2^n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i V(\underbrace{K, K, \ldots, K}_{(n-i)}, \underbrace{B_2^n, \ldots, B_2^n}_{i}).$$

Это называется формулой Штейнера. Она обобщает формулу для треугольника, с которой мы начали.

Для любого выпуклого тела K можно определить площать поверхности формулой

$$S(K) := \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{Vol}(K + tB_2^n) - \operatorname{Vol}(K)}{t}.$$

Предел, очевидно, существует и равен $nV(K, B_2^n, \dots, B_2^n)$. Проверьте, что получается привычная формула $S(B_2^n) = n\,\mathrm{Vol}(B_2^n)$. Для "хороших" тел (скажем, выпуклых или с кусочно–гладкой границей) таким образом определённая площадь поверхности совпадает с другими определениями.

Изопериметрическое неравенство: среди всех тел K с фиксированным объёмом минимальная площадь поверхности у шара. Действительно, из неравенства Брунна–Минковского мы знаем, что при всех $t > 0$ величина $\mathrm{Vol}(K + tB_2^n)$ минимальна для шара, остаётся перейти к пределу. (Правда, мы не доказали, что нет других минимумов.)

Доказательство существования смешанного объёма. Общий план доказательства таков: сначала мы докажем, что объём $\mathrm{Vol}(t_1K_1 + \dots + t_mK_m)$ это однородный многочлен степени n по $t_1, \dots, t_m \geqslant 0$ при фиксированных K_j:

$$\mathrm{Vol}(t_1K_1 + \dots + t_mK_m) = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m} t_{i_1}t_{i_2}\dots t_{i_n} v_{i_1,\dots,i_n} \tag{2}$$

и определим смешанные объёмы K_j как коэффициенты этого многочлена: $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) := v_{i_1,\dots,i_n}$. Далее мы установим все обещанные их свойства.

Доказательство (2) проведём сначала для многогранников индукцией по размерности, а общий случай получим предельным переходом.

База индукции: $n = 1$ это просто случай отрезков:

$$\mathrm{Vol}_1(t_1[a_1, b_1] + \dots + t_m[a_m, b_m]) = \sum_{i=1}^{m} t_i(b_i - a_i).$$

Для дальнейшего вспомним некоторые свойства многогранников.

Многогранники. Напомним, что многогранником в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка конечного числа точек. Многогранник имеет грани разной размерности (0 — вершины, 1 — рёбра и т.п.). Грани максимальной размерности $n-1$ называем *гипергранями.*

Напомним определение *опорной функции*

$$h_K(u) := \max_{x\in K}\langle x, u\rangle.$$

Опорную гиперплоскость обозначим как $H_K(u) := \{x\colon \langle x, u\rangle = h_K(u)\}$.

Пусть $\{u_i\}$ — единичные нормали к гиперграням многогранника P, направленные наружу. Докажем формулу

$$\mathrm{Vol}_n(P) = \frac{1}{n}\sum_i h_P(u_i)\,\mathrm{Vol}_{n-1}(H_P(u_i)\cap P). \tag{3}$$

Действительно, предположим сначала, что $0 \in P$. Многогранник разбивается на пирамиды с центром 0 и основаниями F_i — гипергранями P. Объём каждой такой пирамиды равен $\frac{1}{n}h_i\,\mathrm{Vol}_{n-1}(F_i)$. Нетрудно видеть, что $h_i = h_P(u_i)$ и $F_i = H_P(u_i)\cap P$. Суммируя по i, получаем (3). Заметим, что если сдвинуть P на вектор x_0, то сумма в (3) изменится на $\sum_i \langle x_0, u_i\rangle\,\mathrm{Vol}_{n-1}(H_P(u_i)\cap P)$. С другой стороны, объём не изменится, поэтому эта сумма равна нулю (для любых малых x_0, а значит и для всех). Поэтому (3) справедлива и в общем случае.

Для доказательства (2) нужно рассмотреть $P = t_1P_1 + \ldots + t_mP_m$, где P_i — многогранники. Почему P многогранник? Дело в том, что любая его крайняя точка e имеет вид $e = \sum t_ix_i$, $x_i \in P_i$. Ясно, что каждая x_i является крайней точкой соответствующего P_i (иначе x_i содержится в некотором отрезке, а тогда и e содержится в отрезке). Но крайних точек у P_i конечное число, значит и различных крайних точек P конечное число, но P есть выпуклая оболочка этих точек (по теореме Крейна–Мильмана), значит, это многогранник.

Следующее простое свойство P заключается в том, что

$$h_P = t_1h_{P_1} + \ldots + t_mh_{P_m}.$$

(Проверьте!)

Докажем аналогичное равенство для гиперграней P.

Лемма 1. *Каждая гипергрань $H_P(u)\cap P$ многогранника P имеет вид*

$$H_P(u)\cap P = t_1(H_{P_1}(u)\cap P_1) + \ldots + t_m(H_{P_m}(u)\cap P_m).$$

Доказательство. Действительно, пусть $x \in P$, $\langle x, u\rangle = h_P(u)$. По определению, $x = \sum t_ix_i$, $x_i \in P_i$ для некоторых x_i. Тогда:

$$h_P(u) = \langle x, u\rangle = \sum t_i\langle x_i, u\rangle \leqslant \sum t_ih_{P_i}(u) = h_P(u).$$

Значит, неравенство обращается в равенство и $\langle x_i, u\rangle = h_{P_i}(u)$ для всех i. Мы доказали, что множество в левой части доказывамого равенства лежит в сумме из правой части. Обратное аналогично. □

Теперь легко сделать индуктивный переход для (2) в случае многогранников. Имеем:

$$\mathrm{Vol}_n(P = t_1P_1 + \ldots + t_mP_m) = \frac{1}{n}\sum_u h_P(u)\,\mathrm{Vol}_{n-1}(P \cap H_P(u)) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_u (t_1h_{P_1}(u) + \ldots + t_mh_{P_m}(u))\,\mathrm{Vol}_{n-1}(t_1F_1 + \ldots + t_mF_m),$$

где $F_i := H_{P_i}(u) \cap P_i$. По индукции, $n-1$-мерный объём является однородным многочленом степени $n-1$; перемножая, получаем однородный многочлен степени n.

Тут есть небольшой обман: в первой сумме $\sum_u$ множество нормальных векторов $\{u\}$ может зависеть от $t_1, \ldots, t_m$. Однако, можно показать, что все возможные нормальные вектора u содержатся в одном конечном множестве $\mathcal{U}$; мы можем суммировать по $u \in \mathcal{U}$ (если для данного u не получается гипергрань, то и слагаемое будет равно нулю). Существование $\mathcal{U}$ следует из Леммы 1. Действительно, из равенства для $H_P(u) \cap P$ следует, что линейная часть гиперплоскости (т.е. $\{x - x_0 \colon x \in H_P(u)\}$ с фиксированным $x_0 \in H_P(u)$) есть линейная комбинация линейных частей граней $H_{P_i}(u)$ многогранников P_i. А этих граней лишь конечное число.

Итак, равенство (2) доказано для многогранников. Заметим, что любое выпуклое тело K можно приблизить многогранником в метрике Хаусдорфа. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим вложение $(1-\varepsilon) \subset K$. Для достаточно малого $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ объединение C_δ кубов с ребром δ (из стандартной решётки) лежит в K. Тогда

$$(1-\varepsilon)K \subset P_\varepsilon \subset K, \quad P_\varepsilon := \mathrm{conv}\, C_\delta.$$

Ясно, что $P_\varepsilon \to K$. Итак, для заданных $K_1, \ldots, K_m$ мы можем построить последовательности $P_1^j \to K_1, \ldots, P_m^j \to K_m$ $(j \to \infty)$; тогда

$$\mathrm{Vol}(t_1K_1 + \ldots + t_mK_m) = \lim \mathrm{Vol}(t_1P_1^j + \ldots + t_mP_m^j) = \lim \sum t_{i_1} \cdots t_{i_n} v^j_{i_1,\ldots,i_m}.$$

Поскольку предел существует, он также является многочленом (почему?) и его коэффициенты это предел соответствующих коэффициентов при $j \to \infty$. Равенство (2) доказано.

Доказательство свойств. Итак, мы полагаем $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) := v_{i_1,\dots,i_n}$, где v это коэффициенты многочлена из (2), см. также (1). При этом договоримся, что если $\{i_1, \dots, i_n\}$ это перестановка $\{j_1, \dots, j_n\}$, то мы считаем, что соответствующие коэффициенты в многочлене равны. Это обеспечивает симметричность функции V.

Проверим корректность: если среди $K_{i_1}, \dots, K_{i_n}$ не встречаются какие-то K_i, то значение смешанного объёма не должно зависеть от этих K_i. Это так: мы можем положить в многочлене (2) $t_i = 0$; должен получиться тот же многочлен, что и для любых других тел K'_i.

Свойство диагонали: $\operatorname{Vol}(t_1K + \ldots + t_nK) = \operatorname{Vol}(K)(t_1 + \ldots + t_n)^n = \sum t_{i_1} \cdots t_{i_n} \operatorname{Vol}(K)$. Т.е. все коэффициенты, равные по определению $V(K, K, \dots, K)$, равны $\operatorname{Vol}(K)$. Инвариантность относительно сдвига вытекает из аналогичного свойства Vol.

Проверим линейность: $V(\alpha K+\beta L, K_2, \dots, K_n) = \alpha V(K, K_2, \dots, K_n) + \beta V(L, K_2, \dots, K_n)$. Рассмотрим величину $\operatorname{Vol}(t_1(\alpha K + \beta L) + t_2K_2 + \ldots + t_nK_n)$; это многочлен по t_i; рассмотрим коэффициент при $t_1t_2 \cdots t_n$. С одной стороны, он равен $V(\alpha K + \beta L, K_2, \dots, K_n)$. С другой стороны, $\operatorname{Vol}(t_1(\alpha K+\beta L)+t_2K_2+\ldots+t_nK_n) = \operatorname{Vol}((\alpha t_1)K+(\beta t_1)L+t_2K_2+\ldots+t_nK_n)$ и коэффициент при $t_1t_2 \dots t_n$ у этого многочлена складывается из двух:

$$(\alpha t_1)t_2 \cdots t_n V(K, K_2, \dots, K_n) + (\beta t_1)t_2 \cdots t_n V(L, K_2, \dots, K_n).$$

Приравнивая коэффициенты, получает требуемое равенство.

Непрерывность вытекает из непрерывности объёма и того факта, что если последовательность многочленов поточечно сходится к многочлену, то и коэффициенты сходятся.

Неотрицательность следует из монотонности: сдвинув K_i, добьёмся того, что $0 \in K_i$, тогда $V(K_1, \dots, K_n) \geqslant V(\{0\}, \dots, \{0\}) = 0$.

Доказательство монотонности. Монотонность вытекает из следующей формулы:

$$V(K, P_2, \dots, P_n) = \frac{1}{n} \sum h_K(u) v(H_{P_2}(u) \cap P_2, \dots, H_{P_n}(u) \cap P_n).$$

Здесь v это $(n-1)$-мерный смешанный объём.

Действительно, если $K \subset L$, то $h_K \leqslant h_L$, а смешанный объём неотрицателен (фактически, мы должны провести доказательство индукцией по размерности). Многогранники можно заменить на произвольные выпуклые тела предельным переходом.

Докажем формулу. Положим $P := t_2 P_2 + \ldots + t_n P_n$, тогда

$$V(K, P, \ldots, P) = \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(P + \varepsilon K) - \mathrm{Vol}(P)}{\varepsilon}.$$

Для многогранника окрестность $P + \varepsilon K$ даёт над каждой гранью слой ширины $h_K(u)$ (где u, как обычно, нормаль к грани). Поэтому

$$\mathrm{Vol}(P + \varepsilon K) = \mathrm{Vol}(P) + \varepsilon \sum h_K(u) \,\mathrm{Vol}_{n-1}(H_P(u) \cap P) + O(\varepsilon^2)$$

и $V(K, P, \ldots, P) = \frac{1}{n} \sum h_K(u) \,\mathrm{Vol}_{n-1}(H_P(u) \cap P)$. По доказанной ранее Лемме, $H_P(u) \cap P = t_2(H_{P_2}(u) \cap P_2) + \ldots + t_n(H_{P_n}(u) \cap P_n)$, поэтому

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(H_P(u) \cap P) = \sum t_{i_2} \cdots t_{i_n} v(H_{P_{i_2}}(u) \cap P_{i_2}, \ldots, H_{P_{i_n}}(u) \cap P_{i_n}).$$

С другой стороны, $V(K, P, \ldots, P) = \sum t_{i_2} \cdots t_{i_n} V(K, P_{i_2}, \ldots, P_{i_n})$. Приравнивая коэффициенты при $t_2 \cdots t_n$, получаем нужное равенство.

Единственность .

Смешанные объёмы однозначно определяются своими свойствами. Например, можно доказать следующую формулу:

$$n! V(K_1, \ldots, K_n) = \mathrm{Vol}(K_1 + \ldots + K_n) - \sum_i \mathrm{Vol}(K_1 + \ldots + \widehat{K_i} + \ldots + K_n) +$$
$$+ \sum_{i,j} \mathrm{Vol}(K_1 + \ldots + \widehat{K_i} + \ldots + \widehat{K_j} + \ldots + K_n) + \ldots + (-1)^{n-1} \sum_i \mathrm{Vol}(K_i).$$

Здесь $\widehat{K}$ обозначает отсутствие этого слагаемого. Доказательство формулы остаётся в качестве задачи.

Список литературы

[1] P.M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*. Springer, 2007.