Курс “Гармонический анализ”. Лекция 1: Введение

14 марта 2025 г.

Гармонический анализ — исследование функций с помощью их рядов Фурье. Многие тонкие вопросы гармонического анализа посвящены поточечной сходимости рядов Фурье, поведению общих тригонометрических рядов $\sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Мы же сфокусируемся на более общем теоретико-функциональном подходе, на нормированных пространствах и операторах.

База. $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, функции $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ отождествляем с 2π-периодическими функциями $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Интеграл по $\mathbb{T}$ это интеграл по периоду:

$$\int_T f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Пространства L_p берём с нормированной нормой:

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{1}$$

и $\|f\|_\infty := \operatorname{esssup}_{x\in T}|f(x)|$.

Вообще будем стараться усреднять!

Коэффициенты Фурье $\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)e^{-inx}\,dx$. В нормировке (1) имеем $|\hat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1$.

Ряд Фурье: $Sf \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$. Частичные суммы ряда Фурье: $S_n f := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}$. В отличие от ряда, S_n представляют собой корректно

определённые функции. А точнее, тригонометрические полиномы, то есть функции вида
$$P = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Свёртка $(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_T f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ определена для $f, g \in L_1$. Свойства:

- $f * g \in L_1$, $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$;
- $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

Доказательство: применяем теорему Фубини для функции двух переменных $H(t, \tau) := f(\tau)g(t-\tau)$.

Ядра суммирования. Определение. Последовательность непрерывных фунций $k_n \in C(\mathbb{T})$ называется *ядром суммирования* (summability kernel), если выполнены свойства:

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(x)\,dx = 1$ для всех n;
2. $\sup_n \int_{\mathbb{T}} |k_n(x)|\,dx < \infty$;
3. для любого $\delta > 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(x)|\,dx = 0. \tag{2}$$

Нам потребуется интеграл Римана для непрерывных функций $\varphi\colon [a, b] \to X$ со значениями в банаховом пространстве B. Интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ определяется аналогично обычному интегралу Римана, как предел интегральных сумм
$$\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)\varphi(x_i), \quad x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n < b = x_{n+1},$$
при стремлении диаметра разбиения, $\max(x_{i+1} - x_i)$, к нулю. Точно так же доказывается, что интеграл (от непрерывной функции) существует, линеен по φ, оценивается:
$$\left\|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right\| \leqslant \int_a^b \|\varphi(x)\|\,dx. \tag{3}$$

Часто нужен не сам интеграл, а оценка нормы. Тогда можно использовать линейные функционалы и равенство

$$\left\langle \xi, \int_a^b \varphi(x)\,dx \right\rangle = \int_a^b \langle \xi, \varphi(x)\rangle,\, dx, \quad \xi \in B^*.$$

Заметим, что справа — обычный интеграл.

Лемма 1. *Пусть $\{k_n\}$ — ядро суммирования, $\varphi\colon \mathbb{T} \to B$ непрерывная банаховозначная функция, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(0).$$

Доказательство.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} k_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))\,d\tau.$$

Первое слагаемое оцениваем, пользуясь ограниченностью норм k_n и непрерывностью φ. Второе слагаемое — используя δ-свойство (2). $\square$

Для функции $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ через f_τ обозначим её сдвиг: $f_\tau(\cdot) = f(\cdot - \tau)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\varphi(\tau) = f_\tau$, функция $k(\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{T}$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau\,d\tau = k * f.$$

Доказательство. Пусть функция f непрерывна. Интегральная сумма имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)k(\tau_i)f(t-\tau_i).$$

При стремлении диаметра разбиения к нулю эта величина равномерно по t сходится к $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$, то есть к свёртке.

В общем случае мы можем приблизить f непрерывной функцией: $\|f-g\|_C \leqslant \varepsilon$, тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau)f_\tau\,d\tau - k*f = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau)(f_\tau - g_\tau)\,d\tau - k*(f-g).$$

Норма первого слагаемого оценивается по (3):

$$\| \int_{\mathbb{T}} k(\tau)(f_\tau - g_\tau)\, d\tau\|_1 \leqslant \int_T |k(\tau)| \|f_\tau - g_\tau\|_1\, d\tau \leqslant \|k\|_C \varepsilon.$$

Норма второго слагаемого не превосходит $\|k\|_1 \varepsilon$. Устремляем ε к нулю. $\square$

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $\{k_n\}$ — ядро суммирования, $f \in L_1$. Тогда $\|k_n * f - f\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.*

Ядра Дирихле и Фейера. Ясно, что $S_n f = f * D_n$, где $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Эта функция называется ядром Дирихле. Представим её в явном виде:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{2i \sin((n+1/2)x)}{2i \sin(x/2)}.$$

Итак,

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin \frac{x}{2}}. \tag{4}$$

К сожалению, нормы $\|D_n\|_1$ не ограничены и ядро Дирихле не является ядром суммирования.

Если последовательность s_n не сходится, рассматривают сходимость по Чезаро, т.е. последовательность средних арифметических $\sigma_n := (s_0 + s_1 + \ldots + s_n)/(n+1)$. В нашем случае — суммы Чезаро

$$\sigma_n(f, x) := \frac{1}{n+1}(S_0 f + S_1 + \ldots + S_n f).$$

Ясно, что $\sigma_n(f) = f * K_n$, где $K_n = (D_0 + D_1 + \ldots + D_n)/(n+1)$. Эта последовательность называется ядром Фейера. Можно показать, что

$$K_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{(n+1) \sin \frac{x}{2}}.$$

Главное свойство — ограниченность — выполняется за счёт того, что $K_n \geqslant 0$. Поэтому ядро Фейера является ядром суммирования.

Следствие 1. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$. Тогда*

- $\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$ *при* $n \to \infty$,
- *если* $\hat{f}(n) = 0$ *при всех* n, *то* $f \equiv 0$,
- *тригонометрические полиномы плотны в* L_1,
- $\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(n)| = 0$*; оператор Фурье* $f \mapsto \hat{f}$ *это ограниченный оператор* $L_1 \to c_0$.

Первый пункт следует из теоремы 1, остальные вытекают из него.

Однородные пространства. Назовём банахово пространство B однородным, если:

- B является подпространством $L_1(\mathbb{T})$, т.е. $B \subset L_1$ и $\|f\|_1 \leqslant C\|f\|_B$;
- если $f \in B$, то $f_\tau \in B$ и $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$ для любого τ;
- $f_\tau \to f_{\tau_0}$ при $\tau \to \tau_0$ для любого τ_0.

Примеры: L_p, $p < \infty$, $C(\mathbb{T})$, $C^r(\mathbb{T})$.

Теорема 2. *Если* B *— однородное пространство,* $f \in B$, *и* $\{k_n\}$ *— ядро суммирования, то*

$$\|k_n * f - f\|_B \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau$ можно понимать как интеграл в B (т.к. пространство однородно и f_τ непрерывно по τ), он сходится к f по лемме 1. С другой стороны, так как $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_B$, этот интеграл определён и в L_1 и равен той же функции. В силу леммы 2, эта функция есть $k_n * f$. □

Значит, выводы следствия 1 справедливы в любом однородном пространстве.

Ядро Валле Пуссена. Ядро $V_n = 2K_{2n-1} - K_{n-1}$ также является ядром суммирования. Оно полезно тем, что сохраняет тригонометрические полиномы порядка n и $\|V_n\|_1 \leqslant 3$. Отсюда:

$$\|f - V_n * f\|_p \leqslant 4E_n(f)_p,$$

где $E_n(f)_p$ это наилучшее приближение f в L_p триг. полиномами степени не выше n.