Курс “Гармонический анализ”. Лекции 2 и 3: интерполяция

21, 28 марта 2025 г.

Напомним, что $\{e^{ikx}\}$ — полная ортонормированная система в (комплексном) пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat f(k)|^2)^{1/2}.$$

Другими словами, преобразование Фурье это изометричный оператор $L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$. Кроме того, это оператор единичной нормы $L_1(\mathbb{T}) \to \ell_\infty(\mathbb{Z})$. Что можно сказать про его свойства в промежуточных L_p, $1 < p < 2$? В такой ситуации работает техника интерполяции.

Слабые L_p-пространства. Пусть $L_p(X,\mu)$ — общее пространство L_p. Мы требуем только сигма-конечность меры (т.е. X можно представить в виде счётного объединения множеств конечной меры). Такая общность полезна, чтобы включить в рассмотрение, скажем, $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Слабым L_p-пространством, или $L_{p,\infty}$ называем пространство функций $f\colon X \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\infty} := \inf\{C\colon \forall\alpha>0\ \mu\{x\colon |f(x)|>\alpha\} \leqslant \frac{C^p}{\alpha^p}\}.$$

Проверим, что $\|f\|_{p,\infty} \leqslant \|f\|_p$ (отсюда название “слабая”: конечность этой нормы более слабое требование, чем конечность нормы в L_p). Действительно, для любого $\alpha > 0$ имеем

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p\,d\mu \geqslant \alpha^p\mu\{x\colon |f(x)|>\alpha\},$$

поэтому в качестве C можно взять $\|f\|_p$. Аналогия из теории вероятностей: неравенство Маркова $\mathsf{P}\{|\xi| > \alpha\} \leqslant \mathsf{E}\xi/\alpha$.

Пример: пусть $f(x) = x^{-\gamma}$, $x \in (0,1)$ (пусть параметр $\gamma > 0$). Эта функция лежит в $L_{p,\infty}$ при $p\gamma \leqslant 1$ и в L_p при $p\gamma < 1$.

Докажем неравенство

$$\|f+g\|_{p,\infty} \leqslant 2(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}).$$

Действительно, множество $\{x\colon |f(x)+g(x)| > \alpha\}$ лежит в объединении двух множеств $\{x\colon |f(x)| > \alpha/2\}$ и $\{x\colon |g(x)| > \alpha/2\}$, откуда

$$\mu\{x\colon |f(x)+g(x)| > \alpha\} \leqslant \mu\{x\colon |f(x)| > \alpha/2\} + \{x\colon |g(x)| > \alpha/2\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|f\|^p_{p,\infty}}{(\alpha/2)^p} + \frac{\|g\|^p_{p,\infty}}{(\alpha/2)^p} = \alpha^{-p}2^p(\|f\|^p_{p,\infty} + \|g\|^p_{p,\infty}) \leqslant \alpha^{-p}2^p \cdot (\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty})^p,$$

что и требовалось.

Пространство $L_{p,\infty}$ — *квазинормированное*, в нём неравенство треугольника выполняется с константной.

Другой пример квазинормированного пространства — L_p, $0 < p < 1$. Известно, что в таком L_p:

- нет нетривиальных открытых выпуклых подмножеств;
- нет непрерывных линейных функционалов.

Поэтому в таких L_p не работает двойственность.

Задача 1. Что можно сказать о $L^*_{p,\infty}$?

Задача 2. Постройте пример случайных величин $f_1, \ldots, f_N$, таких что $\|f_j\|_{1,\infty} \leqslant 1$ для всех j, но $\|\sum_{j=1}^N f_j\|_{1,\infty} \geqslant cN\log N$.

Есть, всё же, и хорошие новости: любую квазинорму можно заменить на эквивалентную (т.е. $\|x\|_1 \leqslant A\|x\|_2 \leqslant B\|x\|_1$), для которой существует $\gamma > 0$, такое что $\|x-y\|^\gamma$ является метрикой (выполнено неравенство треугольника, но потеряна однородность).

Введём обозначение

$$\mu_f(\alpha) := \mu\{x\colon |f(x)| > \alpha\}.$$

Функция μ_f похожа на функцию распределения случайной величины; отличие в модуле и в знаке неравенства.

Утверждение. Для $p > 0$ имеем

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \mu_f(\alpha) \, d\alpha. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию двух переменных $x \in X$ и $\alpha \in (0, \infty)$:

$$g(x, \alpha) := p\alpha^{p-1} \mathbf{1}\{|f(x)| > \alpha\}.$$

Интегрируем сначала по α, потом по x:

$$\int_X \int_0^\infty g(x, \alpha) \, d\alpha \, d\mu(x) = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} \, d\alpha \, d\mu(x) = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = \|f\|_p^p.$$

Теперь в другом порядке (по теореме Фубини, интеграл получится тот же):

$$\int_0^\infty \int_X g(x, \alpha) \, d\mu(x) \, d\alpha = \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \mu_f(\alpha) \, d\alpha.$$

Равенство доказано. $\square$

Перейдём к интерполяции. Первым примером будет интерполяция между L_p пространствами.

Утверждение. Если $f \in L_{p_0} \cap L_{p_1}$, и $p \in (p_0, p_1)$, то $f \in L_p$. Если $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $\theta \in (0, 1)$, то

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Ясно, что θ всегда найдётся; в случае $\theta \approx 0$ имеем $p \approx p_0$, а если $\theta \approx 1$, то $p \approx p_1$, что соответствует неравенству. Напомним, что пространства $\ell_p(\mathbb{Z})$ растут с ростом p, а пространства $L_p[0, 1]$ убывают. Пространства $L_p(\mathbb{R})$ не сравнимы между собой. Однако интерполяция имеет место в каждом случае.

Доказательство. Нужно применить неравенство Гёльдера:

$$\int |f|^p = \int |f|^{p(1-\theta)} \cdot |f|^{p\theta} \leqslant (\int |f|^{p(1-\theta)q})^{1/q} (\int |f|^{p\theta q'})^{1/q'}.$$

Положим $p(1-\theta)q = p_0$, откуда несложными вычислениями найдём, что $p\theta q' = p_1$ и всё получится. $\square$

Задача 3. ° Пусть $p \in (p_0, p_1)$. Докажите, что $L_p \subset L_{p_0} + L_{p_1}$ (сумма по Минковскому, т.е. это множество сумм вида $f_0 + f_1$, $f_0 \in L_{p_0}$, $f_1 \in L_{p_1}$).

Переходим к основным теоремам интерполяции. Их две:

1. Теорема Марцинкевича (вещественная интерполяция).

2. Теорема Рисса–Торина (комплексная интерполция).

Теорема 1 (Интерполяционная теорема Марцинкевича)**.** *Пусть* (X, μ), (Y, ν) *— пространства с сигма-конечными мерами,* $0 < p_0 < p_1 < \infty$. T *— оператор, определённый на* $L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X)$*, принимающий значения в пространстве измеримых функций на* Y*, субаддитивный:*

$$|T(f+g)(y)| \leqslant |Tf(y)| + |Tg(y)|, \quad \forall y \in Y,$$

обладающий слабым (p_0, p_0) *типом и слабым* (p_1, p_1) *типом:*

$$\|Tf\|_{L_{p_0,\infty}(Y)} \leqslant A_0 \|f\|_{L_{p_0}(X)}, \quad \forall f \in L_{p_0}(X),$$

$$\|Tf\|_{L_{p_1,\infty}(Y)} \leqslant A_1 \|f\|_{L_{p_1}(X)}, \quad \forall f \in L_{p_1}(X).$$

Тогда для любого $p \in (p_0, p_1)$ *оператор* T *ограничен из* L_p *в* L_p*:* $\|Tf\|_{L_p(Y)} \leqslant A\|f\|_{L_p(X)}$*, где* $A = A(A_0, A_1, p_0, p_1)$.

Здесь T не предполагается линейным или однородным, нужна только субаддитивность (мы пишем “оператор”, чтобы подчеркнуть, что T действует на функции).

Доказательство. Разберём только случай $p_1 < \infty$; случай $p_1 = \infty$ аналогичен.

Оценим $\mu_f(\alpha)$ и воспользуемся равенством (1). Положим $f := f_0^\alpha + f_1^\alpha$, где в f_0 мы оставляем большие значения: $|f(x)| > \alpha$, а в f_1 — остальные: $|f(x)| \leqslant \alpha$. В силу субаддитивности, $|Tf| \leqslant |Tf_0^\alpha| + |Tf_1^\alpha|$,

$$\nu\{y \in Y \colon |Tf(y)| > \alpha\} \leqslant \nu\{|Tf_0^\alpha| > \alpha/2\} + \nu\{|Tf_1^\alpha| > \alpha/2\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_0^{p_0} \|Tf_0^\alpha\|_{p_0}^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} + \frac{A_1^{p_1} \|Tf_1^\alpha\|_{p_1}^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} =$$
$$= (2A_0/\alpha)^{p_0} \int_{|f|>\alpha} |f(x)|^{p_0} \, d\mu(x) + (2A_1/\alpha)^{p_1} \int_{|f|\leqslant\alpha} |f(x)|^{p_1} \, d\mu(x).$$

Имеем

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\nu_{Tf}(\alpha)\,d\alpha \leqslant p(2A_0)^{p_0}I_1 + p(2A_1)^{p_1}I_2,$$

где оба слагаемых получаются из предыдущего неравенства:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^\infty \alpha^{p-1}\left(\alpha^{-p_0}\int_{|f|>\alpha}|f(x)|^{p_0}\,d\mu(x)\right)d\alpha = \\ = \int_X\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1}\mathbf{1}\{|f(x)|>\alpha\}\,d\alpha\,d\mu(x) = \\ = \int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-p_0-1}\,d\alpha\right)d\mu(x) = \\ = \int_X |f(x)|^{p_0}\cdot\frac{1}{p-p_0}|f(x)|^{p-p_0}\,d\mu(x) = \frac{1}{p-p_0}\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается I_2. □

Задача 4. Пусть $A_0 = A_1 = 1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Улучшите оценку на A за счёт разделения f на функции с порогом $\gamma\alpha$ и подбора γ.

Перейдём ко второй теореме интерполяции. Нам потребуется одна лемма из комплексного анализа.

Лемма 1 (Лемма Адамара о трёх прямых.)**.** *Пусть функция F аналитична в полосе $0 < \operatorname{Re} z < 1$, непрерывна и ограничена в замыкании полосы. Предположим, $|F(z)| \leqslant B_0$ при $\operatorname{Re} z = 0$ и $|F(z)| \leqslant B_1$ при $\operatorname{Re} z = 1$. Тогда для любого $\theta \in (0,1)$ имеем*

$$|F(\theta + it)| \leqslant B_0^{1-\theta}B_1^{\theta}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В других терминах: функция $\theta \mapsto \ln\sup_t|F(\theta+it)|$ выпукла на $[0,1]$.

Напомним, что для $a > 0$ степень a^z определяется как $e^{z\ln a}$; при этом $|a^z| = a^{\operatorname{Re} z}$.

Доказательство. Положим

$$G(z) := \frac{F(z)}{B_0^{1-z}B_1^z}, \quad G_n(z) := G(z)e^{(z^2-1)/n},\ n \in \mathbb{N}.$$

На прямой $\operatorname{Re} z = 0$ имеем $|G(it)| = |F(it)|/B_0 \leqslant 1$ и аналогично $|G(1 + it)| \leqslant 1$. Далее, для $z = x + it$ имеем

$$|e^{(z^2-1)/n}| = e^{x^2/n - t^2/n} \leqslant e^{1-t^2/n},$$

поэтом $G_n \to 0$ при $t = \operatorname{Im} z \to \infty$. Значит, при $|t| \geqslant t(n)$ в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем $|G_n(x + it)| \leqslant 1$. Нетрудно видеть, что на граничных прямых $|G_n(z)| \leqslant |G(z)| \leqslant 1$. В силу принципа максимума, $|G_n(x+it)| \leqslant 1$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $|t| \leqslant t(n)$. Значит, $|G_n(z)| \leqslant 1$ во всей полосе. Поскольку $G_n(z) \to G(z)$ при фиксированном z и $n \to \infty$, также $|G(z)| \leqslant 1$ в полосе. На промежуточной прямой тогда имеем

$$|F(\theta + it)| \leqslant |G(\theta + it)| B_0^{1-\theta} B_1^{\theta} \leqslant B_0^{1-\theta} B_1^{\theta},$$

что и требовалось. □

Теорема 2 (Интерполяционная теорема Рисса–Торина.)**.** *Пусть* (X, μ) *и* (Y, ν) *— пространства с сигма-конечными мерами,* $0 < p_0, p_1 \leqslant \infty$ *и* $1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant \infty$*, и задан линейный оператор* $T\colon L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X) \to S(Y)$ *(через* $S(Y)$ *обозначаем пространство измеримых функций). Пусть* T *имеет сильный тип* (p_0, p_1) *и сильный тип* (q_0, q_1)*:*

$$\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \forall f \in L_{p_0},$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1}, \quad \forall f \in L_{p_1}.$$

Тогда при $\theta \in (0, 1)$ *определим* p *и* q *равенствами* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$*. Тогда* T *является ограниченным оператором из* L_p *в* L_q*, причём*

$$\|Tf\|_q \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p.$$

Замечания. Здесь важно, что пространства комплексные. Всякий оператор между вещественными пространствами $T\colon X \to Y$ можно продолжить на их комплексификацию: $T^{\mathbb{C}}(f + ig) = Tf + iTg$, но при этом иногда увеличивается норма.

Задача 5. Привести пример оператора $L_p \to L_q$ для вещественных пространств, у которого после комплексификации увеличивается норма.

Задача 6. Возможно ли это при $p = q$?

Докажем теорему.

Доказательство. Нужно оценить $\|Tf\|_q$ для $\|f\|_p \leqslant 1$, для этого по двойственности достаточно оценить $\langle Tf, g\rangle$ для всех $g \in L_{q'}$, $\|g\|_{q'} \leqslant 1$ (мы обозначаем $\langle u, v\rangle = \int uv$). Будем считать, что f и g это простые функции, дальше предельный переход (см. задачу ниже).

Итак, $f = \sum_{k=1}^m u_k \mathbf{1}_{A_k}$, $u_k \in \mathbb{C}$, A_k — непересекающиеся множества. Аналогично, $g = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{1}_{B_j}$, $v_j \in \mathbb{C}$. Запишем в более удобном виде:

$$f = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \mathbf{1}_{A_k}, \quad a_k > 0, \alpha_k \in \mathbb{R},$$

$$g = \sum_{j=1}^n b_k e^{i\beta_k} \mathbf{1}_{B_k}, \quad b_k > 0, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

Далее, положим $p(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z$, $q(z) = \frac{q'}{q_0'}(1-z) + \frac{q}{q_1'}z$,

$$f_z := \sum_{k=1}^m a_k^{p(z)} e^{i\alpha_k} \mathbf{1}_{A_k}, \quad g_z := \sum_{j=1}^n b_k^{q(z)} e^{i\beta_k} \mathbf{1}_{B_k}.$$

Наконец, $F(z) := \langle f_z, g_z\rangle$. Ясно, что это аналитическая функция. Хотим применить лемму Адамара. Что происходит на граничных прямых:

$$|F(it)| = \langle Tf_{it}, g_{it}\rangle \leqslant \|Tf_{it}\|_{q_0} \|g_{it}\|_{q_0'} \leqslant M_0 \|f_{it}\|_{p_0} \|g_{it}\|_{q_0'},$$

$$\|f_{it}\|_{p_0}^{p_0} = \sum_{k=1}^m a_k^p \mu(A_k) = \|f\|_p^p \leqslant 1,$$

аналогично $\|g_{it}\|_{q_0'}^{q_0'} = \|g\|_{q'}^{q'} \leqslant 1$. Итого, $|F(it)| \leqslant M_0$. Аналогично $|F(1+it)| \leqslant M_1$. Применяем лемму Адамара, получим $|F(\theta + it)| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, но $F(\theta + it) = \langle Tf, g\rangle$, что и нужно было оценить. $\square$

Задача 7. Провести предельный переход в теореме подробно.

Отметим особенности этих двух теорем:

- вещественная интерполяция требует меньше: только слабый тип и сублинейность вместо линейности;

- комплексная интерполяция даёт очень точную оценку нормы, но требует комплексных пространств и нормированности в образе ($q_i \geqslant 1$), чтобы работала двойственность.

Примеры интерполяции. 1. Матрица $A = (A_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $A_{i,j} \in \mathbb{C}$. Если $\sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \leqslant B$ для всех j и $\sum_{j=1}^m |A_{i,j}| \leqslant B$ для всех i, то

$$\|Ax\|_{\ell_p^m} \leqslant B\|x\|_{\ell_p^n}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Действительно, условие на сумму по столбцам означает, что норма A из ℓ_1 в ℓ_1 не больше B, условие по строкам означает, что норма A из ℓ_∞ в ℓ_∞ не больше B. Дальше применяем интерполяцию Рисса–Торина.

2. Неравенство Юнга для свёрток:

$$\|f * g\|_{L_r(\mathbb{T})} \leqslant \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L_q(\mathbb{T})}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Фиксируем $f \in L_1$ и рассмотрим оператор $g \mapsto f * g$. Он ограничен $L_1 \to L_1$ (было на 1-й лекции). Он, легко видеть, ограничен $L_\infty \to L_\infty$. По интерполяции, он ограничен $q \to q$: $\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_1 \|g\|_q$.

Далее, фиксируем $f \in L_q$ и рассмотрим оператор $f \mapsto f * g$. Он ограничен $L_1 \to L_q$. Из неравенства Гёльдера следует, что он ограничен $L_{q'} \to L_\infty$. Осталось проинтерполировать между $(1, q)$ и (q', ∞).

3. Неравенство Хаусдорфа–Юнга.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$. Если $f \in L_p(\mathbb{T})$, то $\hat{f} \in L_q$, точнее,

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^q \right)^{1/q} \leqslant \|f\|_{L_p}.$$

4. Максимальная функция Харди–Литлвуда. Для $f \in L_1(\mathbb{R})$ положим

$$M(f, x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|\, dt.$$

Здесь I — произвольный отрезок, содержащий I.

M — нелинейный оператор, поэтому нужно применять теорему Марцинкевича. M имеет сильный тип (∞, ∞), но не имеет сильного типа $(1, 1)$.

Задача 8. Докажите, что нет сильного (1,1) типа.

Однако, M имееет слабый (1,1) тип:

$$\mu\{x \in \mathbb{R} \colon M(f, x) > \alpha\} \leqslant C \frac{\|f\|_1}{\alpha}. \tag{2}$$

Поэтому мы можем интерполировать и получить сильный (p,p) тип:

$$\|Mf\|_p \leqslant C(p)\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Для доказательства (2) нам потребуется лемма.

Лемма 2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ измеримое множество, E покрыто системой интервалов (не обязательно счётной):*

$$E \subset \bigcup_{\gamma} I_\gamma.$$

Тогда можно выбрать конечную или счётную подсистему $I_1, \ldots, I_k, \ldots$ попарно непересекающихся интервалов, так что

$$\sum_{k \geqslant 1} |I_k| \geqslant \frac{1}{5}\mu(E). \tag{3}$$

Выведем (2). Пусть $E = \{x\colon M(f,x) > \alpha\}$. Каждый $x \in E$ покрыт интервалом I_x, на котором среднее $|f|$ больше α. Выберем по лемме интервалы $I_1, \ldots$. Тогда

$$\mu(E) \leqslant 5 \sum_{k \geqslant 1} |I_k| \leqslant 5\alpha^{-1} \sum_{k \geqslant 1} \int_{I_k} |f| \leqslant (5/\alpha)\|f\|_1.$$

Осталось доказать лемму. Выбираем интервалы жадным образом: I_1 такой что $|I_1| > \frac{1}{2}\sup|I_\gamma|$, далее среди допустимых (те что не пересекаются с I_1) выбираем I_2:

$$|I_2| > \frac{1}{2}\sup\{|I|\colon I \cap I_1 = \varnothing\}.$$

И так далее. Докажем (3). Можно считать, что $|I_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Докажем, что раздутые в 5 раз относительно своего центра I_k покроют E. Достаточно доказать, что они покроют все I_γ. Берём какой-то I_γ. Если он не попал в набор, то нашёлся первый шаг k такой что $|I_{k+1}| < \frac{1}{2}|I_\gamma|$. Раз мы не взяли I_γ на $(k+1)$-м шаге, то он пересекается с одним из I_j, $j \leqslant k$. При этом $|I_j| \geqslant \frac{1}{2}|I_\gamma|$. Значит, раздутый I_j покрывает I_γ.