

Курс “Гармонический анализ”. Лекция 4: теорема Рисса

5 апреля 2025 г.

Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ называется абсолютно сходящимся, если $\sum |c_k| < \infty$. Пространство $A(\mathbb{T})$ функций $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, т.е. для которых $\hat{f} \in \ell_1$, называется алгеброй Винера. Это действительно алгебра: если $f, g \in A(\mathbb{T})$, то $fg \in A(\mathbb{T})$ (это нетрудно проверить). Более того, если $f \in A(\mathbb{T})$ не обращается в ноль, то $1/f$ также лежит в $A(\mathbb{T})$ (теорема Винера).

Определим пространство Соболева $W_p^r(\mathbb{T})$ ($r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$) как множество функций $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, абсолютно непрерывных вместе с производными $f', \dots, f^{(r-1)}$, для которых $f^{(r)} \in L_p$.

Хорошо известно, что $\widehat{f'}(k) = (ik)\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, для абсолютно непрерывной функции f . Отсюда сразу следует, что $W_1^2(\mathbb{T}) \subset A(\mathbb{T})$. Конечно, и $C^2(\mathbb{T}) \subset A(\mathbb{T})$.

Упражнение. $W_2^1 \subset A(\mathbb{T})$.

Упражнение. Верно ли, что $W_1^1 \subset A(\mathbb{T})$?

С другой стороны, в силу равномерной сходимости, $A(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$.

Сопряжённая функция. Пусть $f \in C^2(\mathbb{T})$. Определим сопряжённую функцию $\tilde{f}$ следующим образом:

$$\tilde{f} := -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sign}(k) \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

(При этом $\text{sign } 0 = 0$, как обычно, т.е. слагаемое с $k = 0$ отсутствует.)

Ясно, что $\tilde{f}$ корректно определена и лежит в $C(\mathbb{T})$.

Смысл понятия сопряжённой функции состоит в следующем. Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k \geq 1} c_k z^k,$$

пусть $c_{-k} := \overline{c_k}$. Тогда

$$f(t) := \operatorname{Re} F(e^{it}) = \frac{1}{2}(F(e^{it}) + \overline{F(e^{it})}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt},$$

$$\operatorname{Im} F(e^{it}) = \frac{1}{2i}(F(e^{it}) - \overline{F(e^{it})}) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k > 0} c_k e^{ikt} - \sum_{k < 0} c_{-k} e^{ikt} \right) = \tilde{f}(t).$$

То есть функция и её сопряжённая составляют вещественную и мнимую части аналитической функции.

Отметим, что если f вещественна ($\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$), то и $\tilde{f}$ вещественна.

Упражнение. Чему равно $\tilde{\tilde{f}}$?

Теорема 1 (Рисс). При $1 < p < \infty$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p. \quad (1)$$

Формально, можно понимать теорему так: сначала мы устанавливаем неравенство (1) для функций $f \in C^2$. Далее, из плотности C^2 в L_p и неравенства (1) следует, что оператор $f \mapsto \tilde{f}$ продолжается на всё L_p и ограничен, так что (1) справедливо для всех $f \in L_p$.

Такая конструкция часто встречается в функциональном анализе: сначала некий объект определяется на плотном подмножестве “достаточно хороших” функций, потом доопределяется на всём пространстве.

Доказательство. Сначала предположим, что f — вещественный тригонометрический полином, причём $\hat{f}(0) = 0$. Как уже говорили выше, тогда $\tilde{f}$ тоже вещественная функция, причём, по определению, содержит только положительные гармоники. Следовательно, при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\mathbb{T}} (f(t) + i\tilde{f}(t))^{2k} dt = 0.$$

Разложим по биному Ньютона и возьмём вещественную часть:

$$\sum_{j=0}^k \int_{\mathbb{T}} (-1)^j \binom{2k}{2j} f^{2j}(t) \tilde{f}^{2k-2j}(t) dt = 0.$$

Оценим слагаемое с $j = 0$, пользуясь неравенством Гёльдера:

$$\|\tilde{f}\|_{2k}^{2k} \leq \sum_{j=1}^k \binom{2k}{2j} \|f^{2j} \tilde{f}^{2k-2j}\|_1 \leq \sum_{j=1}^k \binom{2k}{2j} \|f^{2j}\|_{2k}^{2j} \cdot \|\tilde{f}^{2k-2j}\|_{2k}^{2k-2j}.$$

Положим $R := \|\tilde{f}\|_{2k}/\|f\|_{2k}$. Тогда

$$R^{2k} \leq \sum_{j=1}^k \binom{2k}{2j} R^{2k-2j},$$

откуда следует, что число R ограничено: $|R| \leq R(k)$.

Нетрудно избавиться от условий вещественности и ограниченности спектра (пользуемся тем, что триг. полиномы плотны в L_p).

Итак, мы доказали ограниченность оператора $f \mapsto \tilde{f}$ в L_p при $p = 2k$. Если же $2k < p < 2(k+1)$, то воспользуемся интерполяционной теоремой Марцинкевича.

Осталось рассмотреть случай $p < 2$. Здесь работает двойственность. Легко видеть, что

$$\langle f, \tilde{g} \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{\tilde{g}(t)} dt = -\langle \tilde{f}, g \rangle.$$

Следовательно, для $f \in L_p$, $p \in (1, 2)$, имеем

$$\|\tilde{f}\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \langle g, \tilde{f} \rangle = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \langle \tilde{g}, f \rangle,$$

$$\langle \tilde{g}, f \rangle \leq \|\tilde{g}\|_{p'} \|f\|_p \leq C_p \|g\|_{p'} \|f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

□

Следствия. Из ограниченности сопряжённой функции легко вывести ограниченность проекторов Рисса:

$$P_+(f)(x) = \sum_{k>0} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

$$P_-(f)(x) = \sum_{k<0} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

а также оператора частичных сумм ряда Фурье:

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Таким образом,

$$\|S_n(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad f \in L_p(\mathbb{T}), \quad 1 < p < \infty.$$

Пусть $E_n(f)_p := \inf_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_p$ — величина наилучшего приближения f тригонометрическими полиномами заданного порядка. Пусть T_n^* — оптимальный полином для f , тогда:

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_p &= \|f - S_n(f) - (T_n^* - S_n(T_n^*))\|_p \leq \\ &\leq \|f - T_n^*\|_p + \|S_n(f - T_n^*)\|_p \leq \|S_n\|_{L_p \rightarrow L_p} (1 + E_n(f)_p) \leq C_p (1 + E_n(f)_p) \end{aligned}$$

(неравенство Лебега).

Поскольку триг. полиномы плотны, то $E_n(f)_p \rightarrow 0$.

Следствие. При $1 < p < \infty$ для $f \in L_p$ имеем $S_n(f) \rightarrow f$ в L_p .