Курс “Гармонический анализ”. Лекция 5: Разложение Кальдерона–Зигмунда и теория Литлвуда-Пэли

12 апреля 2025 г.

Теория Литлвуда-Пэли позволяет оценивать L_p-нормы функций.

Пусть $h_0 \equiv 1$, $h_{k,j}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, 2^k$ — система Хаара на отрезке $[0, 1]$. Она определяется следующим образом: $h_{k,j}$ имеет носителем двоичный отрезок $[(j-1)/2^k, j/2^k]$ и равен $+2^{k/2}$ на левой половине этого отрезка и $-2^{k/2}$ на правой половине. Это полная ортонормированная система. Функции $\{h_{k,j}\}_{j=1}^{2^k}$ образуют k-ю пачку.

Для $f \in L[0, 1]$ через $c_{k,j}(f)$ обозначим коэффициенты по системе Хаара, т.е. $c_{k,j}(f) = \langle f, h_{k,j} \rangle$. Функции f соответствует ряд Фурье по этой системе:

$$f \sim \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} c_{k,j}(f) h_{k,j} =: P_{-1}(f) + \sum_{k=0}^{\infty} P_k(f),$$

где P_k это k-я пачка ряда. Функция Пэли:

$$\mathcal{P}f := (\sum_k P_k(f)^2)^{1/2}.$$

Теорема 1 (Марцинкевич, Пэли)**.** *Для $1 < p < \infty$ и $f \in L_p[0, 1]$ имеем*

$$c_1(p)\|f\|_p \leqslant \|\mathcal{P}f\|_p \leqslant c_2(p)\|f\|_p. \tag{1}$$

Работать с функцией $\mathcal{P}f$ может быть более удобно, нежели с f, поскольку в ней суммируются неотрицательные слагаемые. Например, если $p \geqslant 2$, то справедлива следующая оценка:

$$\|f\|_p^p \gtrsim \|\mathcal{P}f\|_p^p = \| \sum_k (P_k f)^2 \|_{p/2}^2$$

Нетрудно проверить, что $(a+b)^q \geqslant a^q + b^q$ для $a, b \geqslant 0$ и $q \geqslant 1$, откуда:

$$\|\sum_k (P_k f)^2\|_{p/2}^{p/2} \geqslant \sum_k \|(P_k f)^2\|_{p/2}^{p/2} = \sum_k \|P_k f\|_p^p = \sum_k 2^{-k} \sum_{j=1}^{2^k} (2^{-k/2} c_{k,j}(f))^p.$$

Получили дискретизацию нормы (оценка снизу).

Безусловные базисы и функция Пэли. Пусть X — банахово пространство. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ образует базис Шаудера в X, если любой вектор однозначно по ней раскладывается: $x = \sum_{k \geqslant 1} c_k x_k$. Это равносильно следующим условиям: 1) полнота, $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}} = X$, 2) минимальность, $x_k \notin \overline{\operatorname{span}\{x_j \colon j \neq k\}}$, 3) ограниченность оператора частичных сумм:

$$\|\sum_{k=1}^n \langle x, x_k^* \rangle x_k\| \leqslant C\|x\|,$$

для любых n и x. Здесь $\{x_k^*\} \subset X^*$ это сопряжённая система ($\langle x_i, x_j^* \rangle = \delta_{i,j}$), существование и единственность которой вытекают из пп.1,2. При этом коэффициенты в разложении по базису суть $c_k = \langle x, x_k^* \rangle$.

Базис называется безусловным, если он является базисом при любой перестановке. Нетрудно проверить (см., например, начало книги Кашина и Саакяна), безусловность равносильна условию

$$\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \langle x, x_k^* \rangle x_k\| \leqslant C\|x\|, \quad \varepsilon_k \in \{-1, 1\}. \tag{2}$$

Если ортонормированная система функций $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ образует безусловный базис в $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, то L_p нормы функций f и $\mathcal{P}f := (\sum_{k \geqslant 1} \langle f_k, f \rangle^2 f_k^2)^{1/2}$ эквивалентны. Действительно,

$$\int_0^1 |\sum_{k=1}^n c_k f_k(x)|^p\, dx = \mathsf{E}_\varepsilon \int_0^1 |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k c_k f_k(x)|^p\, dx = \int_0^1 (\mathsf{E}_\varepsilon |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k c_k f_k(x)|^p)\, dx. \tag{3}$$

Воспользуемся дальше (числовым) неравенством Хинчина:

$$(\mathsf{E}_\varepsilon |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k y_k|^p)^{1/p} \asymp (\sum_{k=1}^n y_k^2).$$

(Запись $F \asymp G$ означает, что $F \leqslant c_1 G$ и $G \leqslant c_2 F$ для некоторых констант c_1, c_2; они могут зависеть только от p.)

Продолжим равенство (3):

$$\int_0^1 (\mathsf{E}_\varepsilon |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k c_k f_k(x)|^p)\, dx \asymp \int_0^1 |\sum_{k=1}^n c_k^2 f_k(x)^2|^{p/2}\, dx = \|\mathcal{P} f\|_p^p.$$

Наша цель: доказать, что система Хаара образует безусловный базис в L_p, $1 < p < \infty$. Отсюда и из сказанного выше вытекает теорема Марцинкевича–Пэли. Для доказательство потребуется некоторая дополнительная работа.

Точки Лебега .

Хорошо известно, что для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ почти все точки являются точками плотности, т.е.

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu((x-\delta, x+\delta) \cap E)}{2\delta} = 1$$

для всех $x \in E \setminus E_0$, $\mu(E_0) = 0$.

Нам потребуется небольшое обобщение. А именно, если $f \in L(\mathbb{R})$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{|I| \to 0,\, I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\lim_{|I| \to 0,\, I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)\, dy = f(x). \tag{4}$$

Идея доказательства. Положим

$$T_\varepsilon(f)(x) := \sup_{I \ni x, |I| = \varepsilon} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)|\, dy,$$

$O(f)(x) := \limsup_{\varepsilon \to 0} |T_\varepsilon(f)(x)|$ и $T_*(f)(x) := \sup_{\varepsilon > 0} T_\varepsilon(f)(x)$. Оператор T_* можно оценить через максимальную функцию Харди–Литлвуда (см. лекцию 3) и он обладает слабым $(1,1)$-типом. Нужно показать, что для любого $\delta > 0$ имеем $\mu\{x \colon O(f,x) > \delta\} = 0$. Это делает так: приближаем f хорошей функцией g, оцениваем $O(f,x)$ через $O(g,x)$ и $O(f-g,x)$, далее оцениваем $O(f-g,x)$ через $T_*(f-g)$, пользуемся слабым типом.

Безусловность системы Хаара и разложение Кальдерона–Зигмунда. Нам потребуется разложение Кальдерона–Зигмунда.

Теорема 2. *Любую функцию $f \in L[0,1]$ для заданного $\alpha < \|f\|_1$ можно представить в виде $f = g + b$, где функции g и b обладают следующими свойствами:*

1. $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_1$, $\|g\|_\infty \leqslant 2\alpha$;
2. $b = \sum_{j\geqslant 1} b_j$, *носитель каждой функции b_j лежит в двоичном отрезке I_j; эти отрезки попарное не пересекаются;*
3. $\int_{I_j} b_j = 0$;
4. $\|b_j\|_1 \leqslant 4\alpha|I_j|$;
5. $\sum_j |I_j| \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_1$.

Функция g — "хорошая" (good), поскольку она равномерно ограничена. Функция b "плохая" (bad), но она устроена неким регулярным образом.

Доказательство. Вначале у нас есть отрезок $[0,1]$ — это "нулевое поколение". Разобьём его на два отрезка "первого поколения". Отметим из них те отрезки I, для которых выполено условие

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|\,dx > \alpha. \tag{5}$$

Отмеченные отрезки оставляем, неотмеченные продолжаем разбивать (получится уже "второе поколение"). И так далее.

Объединение всех отмеченных отрезков и будет множеством $\{I_j\}$ из формулировки теоремы. На каждом таком отрезке полагаем

$$b_j = \left(f - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(x)\,dx\right)\mathbf{1}_{I_j},$$

$b = \sum b_j$, $g = f - b$.

У каждого I_j есть "родитель" — вдвое больший содержащий его отрезок I', который не был отмечен, т.е. условие (5) для него не выполняется. Отсюда

$$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{|I'|}\int_{I'} |f(x)|\,dx \leqslant 2\alpha. \tag{6}$$

Отсюда легко получим, что $\int_{I_j} |b_j|\,dx \leqslant 4\alpha|I_j|$. Наконец, в силу (5),

$$\sum_j |I_j| \leqslant \alpha^{-1} \sum_j \int_{I_j} |f(x)|\,dx \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_1.$$

Осталось установить свойства g. Эта функция устроена просто:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \cup I_j, \\ \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy, & x \in \cup I_j. \end{cases}$$

На объединении отрезков $|g(x)| \leqslant 2\alpha$ в силу (6). Если же $x \in [0,1] \setminus \cup I_j$, то для каждого k найдётся неотмеченный отрезок k-го поколения $I^k \ni x$. При этом

$$\frac{1}{|I^k|}\int_{I_k} |f(y)|\,dy \leqslant \alpha$$

Пересечение отрезков I^k даёт x и в силу (4) предел так же не превосходит α (для почти всех x).

Наконец, оценка $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_1$ следует из вида g. □

Теперь мы готовы доказать безусловность системы Хаара. Для удобства обозначений рассматриваем функции с нулевым средним. Безусловность

Нужно доказать (2). На самом деле, достаточно приписывать знаки не индивидуальным функциям, а пачкам, и доказывать, что

$$\|\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k P_k(f)\|_p \asymp \|f\|_p. \tag{7}$$

Это позволит применить рассуждение с функцией Пэли и неравенством Хинчина, установить (1) и вывести безусловность базиса.

Докажем (7). Фиксируем знаки $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$. Рассмотрим оператор

$$T_\varepsilon\colon f \mapsto \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k P_k f.$$

Он ограничен $L_2 \to L_2$, докажем, что он имеет слабый тип $(1,1)$, т.е. ограничен $L_1 \to L_{1,\infty}$.

Зафиксируем $\alpha > 0$ и возьмём разложение Кальдерона–Зигмунда $f = g + b$. Имеем:

$$\mu\{x\colon |T_\varepsilon f(x)| > \alpha\} \leqslant \mu\{x\colon |T_\varepsilon g(x)| > \alpha/2\} + \mu\{x\colon |T_\varepsilon b(x)| > \alpha/2\}.$$

Разберёмся с первым слагаемым:

$$\mu\{x\colon |T_\varepsilon g(x)| > \alpha/2\} \leqslant \frac{\|T_\varepsilon g\|_2^2}{(\alpha/2)^2} = \frac{\|g\|_2^2}{(\alpha/2)^2} \lesssim \alpha^{-2}\|g\|_1\|g\|_\infty \lesssim \alpha\|f\|_1.$$

Второе слагаемое не превосходит меры носителя $T_\varepsilon b$. Покажем, что этот носитель лежит в $\cup I_j$ и поэтому его мера не больше $C\alpha^{-1}\|f\|_1$.

Что такое k-я пачка, $P_k f$? Мы берём среднее значение функции на двоичных отрезках длины 2^{-k} и вычитаем средние на двоичных отрезках длины $2^{-(k-1)}$. Обозначая через I_+ и I_- левую и правую половины отрезка, а через D_k множество двоичных отрезков длины 2^{-k}, можем записать это в следующем виде:

$$P_k f = \sum_{I\in D_{k-1}} \operatorname{Avg}_{I_+}(f)(\mathbf{1}_{I_+} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_I) + \operatorname{Avg}_{I_-}(f)(\mathbf{1}_{I_-} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_I).$$

Вспомним, что $b = \sum_j (f - \operatorname{Avg}_{I_j} f)\mathbf{1}_{I_j}$. Тогда

$$\sum_k \varepsilon_k P_k T_\varepsilon b = \sum_j \sum_k \varepsilon_k \sum_{I\in D_{k-1}} \{\operatorname{Avg}_{I_+}[(f - \operatorname{Avg}_{I_j} f)\mathbf{1}_{I_j}](\mathbf{1}_{I_+} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_I) + \\ + \operatorname{Avg}_{I_-}[(f - \operatorname{Avg}_{I_j} f)\mathbf{1}_{I_j}](\mathbf{1}_{I_-} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_I)\}.$$

Как соотносятся I_+, I_- и I_j? Если $I_j \subset I_+$, то среднее $\operatorname{Avg}_{I_+} = 0$; аналогично для I_-. Если $\mu(I_j \cap I_+) = 0$, это тоже верно. Значит, нетривиальный вклад вносят только отрезки I_j, содержащие I_+, I_-, поэтому $I \subset I_j$ и носитель лежит в объединении I_j. Теорема доказана.