Введение в теорию восстановления сигналов
Лекция 1. Анализ Фурье и дискретизация

28 февраля 2026 г.

Сигнал — функция (от времени). Значение сигнала это некоторая физическая величина, например, электрическое напряжение. Обычно рассматриваем комплекснозначные сигналы; если различие $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ важно, оговариваем это.

Аналоговый сигнал — непрерывное время, произвольные значения. Например, $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Дискретный сигнал — дискретный во времени сигнал с произвольными значениями. Задаётся как последовательность чисел, например, $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ или конечномерный вектор $x \in \mathbb{C}^N$.

Цифровой сигнал — дискретный во времени сигнал с квантованными значениями (т.е. значения из дискретного множества).

Дискретизация сигнала — это преобразование аналогового (непрерывного) сигнала в дискретный сигнал путём измерения его значений в определённые моменты времени. В англоязычной литературе употребляется термин sampling (семплирование).

В современной электронике аналоговые сигналы превращаются в битовые слова с помощью АЦП — аналого-цифрового преобразователя. Это устройство дискретизует входящий аналоговый сигнал (напряжение), семплируя его через равные промежутки времени, потом квантует его значения (с разрешением, например, 12 бит).

Анализ Фурье. T-периодический сигнал, $f(t+T) \equiv f(t)$, представляется в виде комбинации гармонических колебаний с частотой, пропорциональной $1/T$. То есть, раскладывается в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \exp(2\pi i k t/T), \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-2\pi i k t/T)\, dt.$$

Для непериодических сигналов используется преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2\pi i \lambda t).$$

Из контекста будет понятно, что имеется в виду под $\hat{f}$.

Напомним базовые свойства преобразования Фурье:

- для $f \in L_1(\mathbb{R})$: $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, т.е. непрерывна и стремится к нулю на бесконечности;

- для $f \in L_2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ определяется, например, как L_2-предел $\widehat{f_N}$, $f_N := f\mathbf{1}_{[-N,N]}$; на $L_1 \cap L_2$ оба определения совпадают; $f \mapsto \hat{f}$ задаёт изометричный оператор $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, причём $\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)$.

Энергия сигнала равна
$$E(f) := \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt.$$
Обоснование: пусть f представляет собой напряжение U. Мощность в цепи с резистором R и напряжением U равна U^2/R, поэтому выделяемая за всё время энергия будет равна $\int_{\mathbb{R}} U^2(t)\, dt$.

Спектр сигнала — носитель преобразования Фурье.

Сигналы с ограниченным спектром. Пример. Пусть $\hat{f} = \mathbf{1}_{[-B,B]}$. Тогда
$$f(t) = \int_{-B}^{B} \exp(2\pi i t\lambda)\, d\lambda = \frac{e^{2\pi iBt} - e^{-2\pi iBt}}{2\pi it} = \frac{\sin \pi 2Bt}{\pi 2Bt}.$$

Теорема (Уиттекер-Найквист-Шеннон-Котельников)**.** *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-B, B]$. *Тогда* f *восстанавливается по отсчётам с частотой* $1/(2B)$*:*
$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(\frac{m}{2B}) \frac{\sin(\pi(2Bt - m))}{\pi(2Bt - m)}.$$

В англ. литературе используют термин “sampling theorem”.

Перед доказательством заметим, что из условия на f следует равенство
$$f(t) = \int_{-B}^{B} \hat{f}(\lambda) \exp(2\pi it\lambda)\, d\lambda. \tag{1}$$
Функция в правой части равенства является аналитической (целой) функцией, поэтому корректно брать значение f в точке. Класс таких аналитических функций называется классом Пэли–Винера, он характеризуется условием
$$|f(z)| = o(\exp(2\pi B|z|)), z \in \mathbb{C},\ z \to \infty,$$
и $f|_{\mathbb{R}} \in L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменой переменной сводим к случаю $B = 1/2$. В этом случае формула выглядит так:
$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \frac{\sin \pi(t - m)}{\pi(t - m)}.$$
Рассмотрим функцию $g(x) := \hat{f}(x)$, её носитель — $[-1/2, 1/2]$. Разложим её в ряд Фурье на этом отрезке:
$$g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \exp(2\pi imx), \quad c_m = \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \exp(-2\pi imx)\, dx = \hat{g}(m) = f(-m).$$

Применим формулу (1):

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} g(\lambda) \exp(2\pi i t\lambda)\, d\lambda = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(-m) \int_{-1/2}^{1/2} \exp(2\pi i(t+m)\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(-m) \frac{\sin \pi(t+m)}{\pi(t+m)}.$$

□

Синк-функция $\sin(\pi t)/(\pi t)$, возникающая здесь, обладает интерполяционным свойством: она равна единице при $t = 0$, и нулю в остальных целых точках.

Пусть $B' < B$. Тогда по отсчётам с частотой $1/(2B')$ нельзя, вообще говоря, восстановить сигнал. Например, если $f(t) = g(t)\sin(2\pi B' t)$, где $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [-(B - B'), (B - B')]$, то $f(k/(2B')) \equiv 0$.

На самом деле важна лишь ширина полосы: если $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [B_1, B_2]$, то полагаем

$$g(t) := f(t) \exp\left(-2\pi i \frac{B_1 + B_2}{2} t\right),$$

тогда $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [-B, B]$, где $B = (B_2 - B_1)/2$.

Рассмотрим (очень упрощая) работу радио. У радиостанции есть *несущая частота* λ_0 и допустимый диапазон $[\lambda_0 - B, \lambda_0 + B]$. Диапазоны разных радиостанций не должны пересекаться. Базово, антенна транслирует сигнал $A\cos(2\pi\lambda_0 t)$. Для передачи информации, этот сигнал *модулируется*. Например, в АМ-радио применяется амплитудная модуляция:

$$f(t) = A(t)\cos(2\pi\lambda_0 t),$$

где в $A(t)$ содержится, собственно, полезная информация. При условии $\operatorname{supp}\hat{A} \subset [-B, B]$ мы не выйдем из допустимого диапазона. Для восстановления сигнала нужно семплировать его с частотой Найквиста $1/(2B)$.

Реальные сигналы, например, конечные во времени, не являются аналитическими функциями и поэтому лишь приблизительно имеют ограниченный спектр.

Справедлив т.н. *принцип неопределённости*.

Теорема. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = 1$. Тогда для любых $t_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:*

$$4\pi \Delta_{t_0}(f)\, \Delta_{\lambda_0}(\hat{f}) \geqslant 1,$$

где

$$\Delta_a(g) := \left(\int_{\mathbb{R}} |x - a|^2 |g(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Отметим (без доказательства), что равенство достигается если и только если f имеет вид

$$f(t) = C \exp(2\pi i \lambda_0 t) \exp(-a(t - t_0)^2/2).$$

Доказательство. Общий случай сводится к $t_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$ заменой $f \mapsto f(t+t_0)e^{-2\pi i\lambda_0 t}$, нужно доказать неравенство

$$(4\pi)^2 \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \lambda^2|\hat{f}(\lambda)|^2\,d\lambda \geqslant 1.$$

По соображениям плотности можно считать, что f дифференцируема и быстро убывает на бесконечности. Тогда

$$(2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}} \lambda^2|\hat{f}(\lambda)|^2\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(\lambda)|^2\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2\,dt.$$

Далее,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t)}\,dt = t|f(t)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} t(f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)})\,dt =$$
$$= -2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{f'(t)}\,dt \leqslant 2|\int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{f'(t)}\,dt| \leqslant$$
$$\leqslant 2(\int_{\mathbb{R}} t^2|f(t)|^2\,dt)^{1/2}(\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2\,dt)^{1/2}.$$

□

Несколько подходов к временной локализации сигналов.

Аппроксимация. Справедливо неравенство (Weiss, Brown):

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(t) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{m}{2B})\frac{\sin\pi(2Bt-k)}{\pi(2Bt-k)} \right| \leqslant C \int_{|t|>B} |\hat{f}(t)|\,dt.$$

Базисы с временной локализацией. 1) Всплески. 2) Преобразование Габора: для $f \in L_2(\mathbb{R})$ полагаем

$$G_f(\tau,\lambda) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-\pi(t-\tau)^2)\exp(-2\pi i\lambda t)\,dt.$$

Дискретное преобразование Фурье. Рассмотрим 1-периодический сигнал: $f(t+1) \equiv f(t)$.

При дискретизации сигнала с частотой $1/N$ компоненты с частотами, отличающимися на кратное N, совпадут:

$$\exp(2\pi ikt) \equiv \exp(2\pi i(k+N)t), \quad t \in \{m/N\}.$$

Это явление называется алиасинг (aliasing).

Пусть спектр сигнала содержится в полосе ширины N; общий случай сводится к спектру $\{0,\ldots,N-1\}$. Запишем сигнал в виде:

$$f(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(2\pi ikt), \quad X_k := N\hat{f}(k).$$

Тогда можно восстановить f по значениям на сетке на периоде с шагом $1/N$. Имеем

$$x_m := f(m/N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} X_k \exp(2\pi i k m/N), \quad 0 \leqslant m < N.$$

Матрица $F_{k,m} := \exp(2\pi i k m/N)$, $0 \leqslant k, m < N$, является унитарной (после нормировки на $\sqrt{N}$), поэтому $F^{-1} = (F^*)/N$, откуда

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \exp(-2\pi i k m/N). \tag{2}$$

Эта формула называется *дискретным преобразованием Фурье* (DFT), а выражение (x_m) через (X_k) — обратным дискретным преобразованием Фурье.

Если точки $\{t_m\}$ не образуют равномерную сетку, говорят о *нерегулярном семплировании*. В этом случае векторы коэффициентов и значений связаны соотношениями

$$f(t_m) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} X_k \exp(2\pi i k t_m).$$

Матрица $(e^{2\pi i k t_m})$ является матрицей Вандермонда, поэтому, если точки $\{t_m\} \subset [0, 1)$ различны, то она обратима и задача восстановления сигнала однозначно разрешима.

Упражнение. Тригонометрическая интерполяция. Рассмотрим тригонометрические полиномы

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(2\pi i k t),$$

Задача интерполяции: $f(m/N) = x_m$, $|m| \leqslant n$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x_k D_n(2\pi(t - t_k)),$$

где D_n — ядро Дирихле, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ikt)$.

Общая интерполяция. Рассмотрим функции (сигналы) вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(t), \quad c_k \in \mathbb{C},\ t \in J, \tag{3}$$

на отрезке $J = [a, b]$ либо на периоде $J = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Система состоит из комплекснозначных непрерывных функций: $\{\varphi_k\} \subset C(J)$. Функции (3) называют полиномами по системе $\{\varphi_k\}$.

Допустим, мы хотим восстановить сигнал (3) по его дискретизации в точках $\{t_m\}_{m=1}^{N}$, т.е. решить задачу интерполяции:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(t_m) = x_m, \quad 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{4}$$

Ясно, что следующие свойства системы $\{\varphi_k\}$ равносильны:

- каждый нетривиальный (не все коэффициенты равны нулю) полином (3) имеет не более $N-1$ нуля;
- для любых N различных точек $\{t_m\} \subset J$ определитель матрицы $(\varphi_k(t_m))$ отличен от нуля;
- задача интерполяции (4) всегда однозначно разрешима.

Такие системы называются чебышёвскими системами.

Теорема (Хаар). *Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^N \subset C(J)$ является чебышёвской тогда и только тогда, когда подпространство $\operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ является чебышёвским в $C(J)$, т.е. любая непрерывная функция имеет в нём единственный ближайший элемент.*

Список литературы

[1] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*.