Введение в теорию восстановления сигналов Лекция 2. Оптимальное восстановление. Линейная информация

7 марта 2026 г.

Пример: восстановление на классе $W^1_\infty[-1,1]$. На предыдущей лекции мы восстанавливали сигнал по его дискретизации, при условии на спектр сигнала. Теперь предположим гладкость: $x(\cdot) \in W^1_\infty[-1,1]$, то есть $\|x'\|_\infty \leqslant 1$, что эквивалентно липшицевости: $|x(s)-x(t)| \leqslant |s-t|$.

Предположим, нам известны значения $y_1 = x(t_1), \dots, y_m = x(t_m)$ в некоторых точках отрезка. Требуется по вектору y приближённо восстановить значение x в точке $\tau \in [-1,1]$. Метод восстановления это отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Нас интересует погрешность в наихудшем случае:

$$\sup_{x \in W^1_\infty} |\varphi(x(t_1), \dots, x(t_m)) - x(\tau)|.$$

Методы, минимизирующие погрешность в наихудшем случае, называются оптимальными.

Пусть $\alpha(t)$ это ближайшая к t точка среди $\{t_k\}$. Рассмотрим функцию $x^*(t) = |t - \alpha(t)|$. Имеем $x^* \in W^1_\infty$, но информация нулевая $y = (0, \dots, 0)$. Поэтому мы не можем отличить x^* со значением $x^*(\tau)$ от $-x^*$ со значением $-x^*(\tau)$ и в любом случае погрешность не меньше $x^*(\tau)$. С другой стороны, если положить $\varphi(y) = y_k$ при $\alpha(\tau) = t_k$, получим

$$|x(\tau) - \varphi(y)| = |x(\tau) - x(t_k)| \leqslant |\tau - y_k| = x^*(\tau).$$

Оптимальных методов может быть много. Среди них можно выделить те, которые оптимальны для каждой информации y. Такие методы называются центральными.

Итак, пусть известен вектор $y \in \mathbb{R}^m$. Возникает множество

$$W_y := \{x \in W^1_\infty \colon x(t_1) = y_1, \dots, x(t_m) = y_m\}.$$

Множество возможных значений $x(\tau)$, $x \in W_y$, является отрезком, поэтому в качестве оптимального значения нужно взять его середину:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\left(\min_{x \in W_y} x(\tau) + \max_{x \in W_y} x(\tau)\right).$$

Найдём явное выражение для этой величины. Положим

$$t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} - \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}, \quad t_j^{**} = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} + \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}.$$

Нетрудно проверить (тут нужен рисунок!), что

$$\varphi(y) = \begin{cases} y_1, & -1 \leqslant \tau \leqslant t_1, \\ y_j, & t_j \leqslant \tau \leqslant t_j^*, \\ \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + \operatorname{sign}(y_{j+1} - y_j)\left(\tau - \frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right), & t_j^* \leqslant \tau \leqslant t_j^{**}, \\ y_{j+1}, & t_j^* * \leqslant \tau \leqslant t_{j+1}, \\ y_m, & t_m \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Общая задача восстановления. Рассмотрим теперь общую задачу восстановления.

Пусть есть множество K в нормированном пространстве X, и неизвестный нам элемент $x \in K$. Мы хотим восстановить значение $T(x)$ некоторого (обычно линейного) отображения $T\colon K \to Z$ по информации $y = I(x) \in Y$. Метод восстановления это отображение $\varphi\colon Y \to Z$. Цель в том, чтобы минимизировать ошибку восстановления в худшем случае:

$$E(\varphi) = \sup_{x \in K} \|T(x) - \varphi(I(x))\|.$$

Диаметр множества множества M в нормированном пространстве Z:

$$\operatorname{diam}(M) := \sup_{z_1, z_2 \in M} \|z_1 - z_2\|.$$

Чебышёвский радиус множества:

$$\operatorname{rad}(M) = \inf_{z_0 \in Z} \sup_{z \in M} \|z - z_0\|.$$

Точка z_0 называется чебышёвским центром, если на ней достигается inf в определении $\operatorname{rad}(M)$. Ясно, что

$$\operatorname{rad}(M) \leqslant \operatorname{diam}(M) \leqslant 2\operatorname{rad}(M).$$

Чебышёвский центр треугольника?

Теорема (Гаркави): в гильбертовом пространстве любое ограниченное множество K имеет единственный чебышёвский центр, он лежит в $\overline{\operatorname{conv} K}$.

Ясно, что для минимизации ошибки восстановления нужно взять в качестве $\varphi(y)$ чебышёвский центр множества $\{T(x)\colon I(x) = y\}$. При этом оптимальная ошибка равна

$$E_{\text{opt}} := \sup_{y \in I(K)} \operatorname{rad}(T(I^{-1}(y))).$$

Это центральный метод. Решение задачи оптимального восстановления состоит в том, чтобы вычислить/оценить эту величину явно и найти простое описание оптимального метода (возможно, другого).

Заметим также, что если в качестве $\varphi(y)$, $y = I(x)$, брать какой-либо $x' \in K$, $I(x') = y$, то получим ошибку

$$E(\varphi) \leqslant \sup_{y \in I(K)} \operatorname{diam}(T(I^{-1}(y))) \leqslant 2E_{\text{opt}}.$$

Линейная информация. Пусть информация линейна:

$$I(x) = (\langle \xi_1, x\rangle, \langle \xi_2, x\rangle, \dots, \langle \xi_m, x\rangle), \quad \xi_k \in X^*. \tag{1}$$

Отметим, что для $y = I(x)$: $I^{-1}(y) = \operatorname{Ker} I + x$.

Лемма. *Пусть K — выпуклое центрально-симметричное множество в нормированном пространстве Z, оператор T линейный. Тогда для любого $x \in K$:*

$$\operatorname{diam}(T(K \cap (\operatorname{Ker} I + x))) \leqslant \operatorname{diam}(T(K \cap \operatorname{Ker} I)) = 2 \sup\{\|x\| \colon x \in K \cap \operatorname{Ker} I\}.$$

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in T(K \cap \operatorname{Ker} I + x)$, то есть $z_1 = Tx_1$, $z_2 = Tx_2$, $I(x_1) = I(x_2) = I(x)$. В силу выпуклости и центрально-симметричности K, имеем $(x_1 - x_2)/2 \in K \cap \operatorname{Ker} I$, откуда

$$\|z_1 - z_2\| = 2\|T\frac{x_1 - x_2}{2}\| \leqslant 2 \sup_{K \cap \operatorname{Ker} I} \|Tx\|.$$

С другой стороны, если $x \in K \cap \operatorname{Ker} I$, то $d(T(K \cap \operatorname{Ker} I)) \geqslant 2\|Tx\|$. □

Другими словами, с точностью до множителя 2 (если не различать чебышёвский радиус и диаметр) нулевая информация хуже всего: мы не различаем x и $-x$ и погрешность восстановления не меньше $\|Tx\|$.

Задача. При $T(x) = x$ предыдущее утверждение можно сформулировать так: для подпространства $L \subset X$, выпуклого центрально-симметричного множества $K \subset X$ и произвольного $h \in X$ имеем

$$\operatorname{diam}(K \cap (L + h)) \leqslant \operatorname{diam}(K \cap L) = 2 \sup_{x \in K \cap L} \|x\|.$$

Верно ли, что $\operatorname{rad}(K \cap (L + h)) \leqslant \operatorname{rad}(K \cap L)$ для всех h?

Теорема (Смоляк)**.** *Пусть K — выпуклое центрально-симметричное множество в нормированном пространстве X. Восстанавливаются значения линейного функционала $T \colon X \to \mathbb{R}$ по линейной информации* (1) *Тогда существует оптимальный линейный метод:*

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k,$$

причём

$$E(\varphi) = E_{\mathrm{opt}} = \sup_{x \in K \cap \operatorname{Ker} I} Tx. \tag{2}$$

Доказательство. Минимально возможная ошибка равна (2) в силу того, что множество $T(I^{-1}(y))$ это отрезок и его чебышёвский радиус равен половине диаметра.

Докажем существование линейного оптимального метода. Можно считать, что информационные функционалы линейно независимы на K (лишние можно убрать). Пусть $E := E_{\mathrm{opt}}$. Рассмотрим множество

$$Y := \{(Tx, \langle \xi_1, x\rangle, \dots, \langle \xi_m, x\rangle) \colon x \in K\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

Оно выпукло и центрально-симметрично. Точка $(E, 0, \dots, 0)$ находится на границе Y. Рассмотрим опорную гиперплоскость в этой точке, она имеет вид $\lambda_0(y_0 - E) + \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k = 0$; по определению,

$$\lambda_0(Tx - E) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle \xi_k, x\rangle \leqslant 0, \quad x \in K.$$

Тогда $\lambda_0 \neq 0$, иначе неравенство даёт линейную зависимость. В силу центрально-симметричности K, точка $(-E, 0, \dots, 0)$ также лежит на границе Y и гиперплоскость $\lambda_0(y_0+E)+\sum_{k=1}^m \lambda_k y_k = 0$ также является опорной:

$$\lambda_0(Tx + E) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle \xi_k, x\rangle \geqslant 0, \quad x \in K.$$

Положим $c_k = -\lambda_k / c_0$, тогда

$$|Tx - \sum_{k=1}^{m} c_k \langle \xi_k, x\rangle| \leqslant E, \quad x \in K,$$

что и требовалось. □

Восстановление вектора. Пусть мы восстанавливаем сам элемент $x \in K$, $K \subset \mathbb{R}^N$, по линейной информации

$$y = Ax \in \mathbb{R}^m.$$

В другой терминологии, числа $y_i = \langle A_i, x\rangle$ называются *измерениями*, а матрица A — *измерительной матрицей*. Тогда погрешность оптимального восстановления удовлетворяет неравенствам

$$\sup_{x \in K \cap \operatorname{Ker} A} \|x\| \leqslant E_{\mathrm{opt}} \leqslant 2 \sup_{x \in K \cap \operatorname{Ker} A} \|x\|.$$

В качестве метода восстановления $\varphi(y)$ можно какое-либо решение следующей задачи:

$$\text{найти } x'\colon \quad x' \in K, \quad Ax' = y. \tag{3}$$

Поперечник по Гельфанду. Если выбрать A оптимальным образом, возникает величина, которая называется *поперечником по Гельфанду* множества K порядка m:

$$d^m(K, X) := \inf_{A \in \mathbb{R}^{m \times N}} \sup_{x \in K \cap \operatorname{Ker} A} \|x\|.$$

Обычно поперечники записываются в терминах линейных подпространств:

$$d^m(K, X) := \inf_{\dim V^m \geqslant N-m} \sup_{x \in K \cap V^m} \|x\|.$$

Поперечник по Гельфанду двойственен поперечнику по Колмогорову, который определяется так:

$$d_m(K, X) := \inf_{\dim V_n \leqslant n} \sup_{x \in K} \rho(x, V_n),$$

где $\rho(x,V_n) := \inf_{y\in V_n}\|x-y\|$.

Напомним определение поляры:

$$K^\circ := \{y\in\mathbb{R}^N\colon \sup_{x\in K}\langle x,y\rangle \leqslant 1\}.$$

Если $X=(\mathbb{R}^N,\|\cdot\|)$ это пространство с единичным шаром B_X, то шар X^* это B_X°.

Утверждение.

$$d_m(B_Y,X) = d^m(B_X^\circ, Y^*).$$

Для доказательства потребуется формула для расстояния до подпространства, докажем её:

$$\rho(x,V)_X = \max_{\xi\in X^*,\xi\perp V,\|\xi\|=1}\langle\xi,x\rangle. \tag{4}$$

Оценка снизу очевидна: для любого $y\in V$ имеем

$$\|x-y\| \geqslant \langle\xi,x-y\rangle = \langle\xi,x\rangle.$$

Оценка сверху: пусть $\rho := \rho(x,V)$. Тогда множества V и $x+\rho B_X^\circ$ не пересекаются, поэтому отделимы некоторым функционалом ξ:

$$\sup_{u\in V}\langle u,\xi\rangle \leqslant \inf_{z\in B_X^\circ}\langle\xi,x+\rho z\rangle.$$

Тогда $\xi\perp V$, иначе супремум равен $+\infty$. Инфимум равен $\langle\xi,x\rangle-\rho$. Отсюда $\langle\xi,x\rangle\geqslant\rho$. Формула (4) доказана, причём максимум достигается.

Теперь легко доказать двойственность: для m-мерного подпространства V имеем

$$\sup_{x\in K}\rho(x,V)_X = \sup_{x\in K}\sup_{\xi\in V^\perp,\|\xi\|_{X^*}\leqslant 1}\langle\xi,x\rangle = \sup_{x\in K}\sup_{\xi\in B_X^\circ\cap V^\perp}\langle\xi,x\rangle$$

Если $K=B_Y$, то $\sup_{x\in K}\langle\xi,x\rangle = \|\xi\|_{Y^*}$. Приходим к определению поперечника по Гельфанду.

M^*-bound. Рассмотрим случайные измерения. На потребуется *гауссовский поперечник* множества:

$$w(K) := \mathsf{E}\sup_{x\in K}\langle Z,x\rangle,\quad Z\sim\mathcal{N}(0,\mathrm{Id}_N).$$

Теорема (M^*-bound)**.** *Пусть $K\subset\mathbb{R}^N$ ограничено, V — случайное подпространство в $\mathbb{R}^N$ коразмерности m. Тогда*

$$\mathsf{E}\max_{x\in K\cap V}\|x\|_2 \leqslant Cm^{-1/2}w(K).$$

Следствие. *$d^m(K,\ell_2^N)\leqslant Cm^{-1/2}w(K)$.*

Случайное подпространство коразмерности m реализуется как ядро гауссовой матрицы $A_{i,j}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Удобно нормировать её так, что $\mathsf{E}|Ax|^2=|x|^2$ для любого $x\in\mathbb{R}^N$. Чему должен быть равен σ?

Следствие. *Пусть A — случайная гауссовская матрица, состоящая из независимых гауссовских величин, $A_{i,j}\sim\mathcal{N}(0,1/m)$. Тогда для любого $x\in K$ и решения $\hat{x}:=\varphi(Ax)$ задачи* (3) *справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}\|x-\hat{x}\|_2\leqslant Cm^{-1/2}w(K).$$