Введение в теорию восстановления сигналов
Лекция 3. M^*-оценка

14 марта 2026 г.

Свойства гауссовой ширины. Напомним определение. Гауссовой шириной множества $K \subset \mathbb{R}^N$ называется величина

$$w(K) := \mathsf{E} \sup_{x \in K} \langle Z, x \rangle, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, I_N).$$

Некоторые свойства:

- $w(K) < \infty \Leftrightarrow K$ ограничено;
- $w(UK + h) = w(K)$ для любого вращения U и сдвига h;
- $w(\operatorname{conv} K) = w(K)$;
- $w(K + L) = w(K) + w(L)$, $w(aK) = |a| w(K)$;
- $w(K) = \frac{1}{2} w(K - K) = \frac{1}{2} \mathsf{E} \sup_{x,y \in K} \langle Z, x - y \rangle$.

Геометрический смысл. Средняя ширина тела вдоль случайного направления равна

$$\mathsf{E} \sup_{x,y \in K} \langle \theta, x - y \rangle, \quad \theta \sim \operatorname{Unif}(S^{N-1}).$$

Мы можем представить $Z = \|Z\|_2 \theta$, откуда в силу $\mathsf{E}\|Z\|_2 \asymp N^{1/2}$ получаем, что средняя ширина $\asymp N^{-1/2} w(K)$.

Sudakov minoration: если $x_1, \ldots, x_M \in K$ и $\|x_i - x_j\|_2 \geqslant \delta$ для всех $i \neq j$, то $w(K) \geqslant c \delta \log M$. Это позволяет оценивать энтропию тела сверху через гауссову ширину.

Доказательство M^*-оценки. Нам потребуется лемма, которую мы докажем позже.

Лемма. *Пусть $\xi_t^1, \ldots, \xi_t^m$ — случайные процессы, индексированные $t \in T$. Пусть также ε_i — независимые радемахеровские величины (равные ± 1 с вероятностью $1/2$). Тогда имеет место два утверждения:*

- *(Симметризация)*

$$\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^{m}(\xi_t^i-\mathsf{E}\xi_t^i)\right|\leqslant 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\xi_t^i\right|.$$

- *(Контракция)*

$$\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\varphi_i(\xi_t^i)\right|\leqslant 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\xi_t^i\right|, \tag{1}$$

для любых контракций φ_i (т.е. $|\varphi_i(s)-\varphi_i(t)|\leqslant|s-t|$, $\forall s,t\in\mathbb{R}$) таких, что $\varphi_i(0)=0$.

Пока что воспользуемся леммой для доказательства следующего утверждения.

Утверждение. *Пусть $T\subset\mathbb{R}^N$ ограничено, $Z,Z_1,\ldots,Z_m$ — независимые гауссовские векторы с распределением $\mathcal{N}(0,I_N)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|\langle Z_i,x\rangle|-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|x\|_2\right|\leqslant\frac{4}{\sqrt{m}}\mathsf{E}\sup_{x\in T}|\langle Z,x\rangle|.$$

Доказательство. Заметим, что $\mathsf{E}|\langle Z,x\rangle|=\|x\|_2\cdot\mathsf{E}|Z_1|=\sqrt{2/\pi}\cdot\|x\|_2$. Далее применяем симметризацию и контракцию с $\varphi_i(u)=|u|$:

$$\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|\langle Z_i,x\rangle|-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|x\|_2\right|=\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|\langle Z_i,x\rangle|-\mathsf{E}|\langle Z_i,x\rangle|\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_i|\langle Z_i,x\rangle|\right|\leqslant 4\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_i\langle Z_i,x\rangle\right|=4\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\langle\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_iZ_i,x\rangle\right|=\frac{4}{\sqrt{m}}\mathsf{E}\sup_{x\in T}|\langle Z,x\rangle|.$$

□

Перейдём непосредственно к M^*-оценке.

Теорема (M^*-bound)**.** *Пусть $K\subset\mathbb{R}^N$ ограничено, V — случайное подпространство в $\mathbb{R}^N$ коразмерности m. Тогда*

$$\mathsf{E}\max_{x\in K\cap V}\|x\|_2\leqslant Cm^{-1/2}w(K).$$

Доказательство. Можно считать, что $K\subset\mathbb{R}^N$ выпуклый компакт (всегда можно взять выпуклую оболочку и замыкание; это не изменит $w(K)$). Реализуем V в виде $V=\operatorname{Ker}A$ с гауссовой матрицей $A\in\mathbb{R}^{m\times N}$, $A_{i,j}\sim\mathcal{N}(0,1)$. Имеем

$$\operatorname{diam}(K\cap V)=\operatorname{diam}(K\cap\operatorname{Ker}A)=\sup_{x\in(K-K)\cap\operatorname{Ker}A}\|x\|_2.$$

Положим $T:=K-K$ и применим доказанное ранее утверждение:

$$\mathsf{E}\sup_{x\in T\cap\operatorname{Ker}A}\|x\|_2\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathsf{E}\sup_{x\in T}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\langle A_k,x\rangle-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|x\|_2\right|\leqslant$$

$$\leqslant Cm^{-1/2}\mathsf{E}\sup_{x\in T}|\langle Z,x\rangle|=Cm^{-1/2}w(T)=2Cm^{-1/2}w(K).$$

□

Доказательство леммы. Симметризация. Пусть $\widetilde{\xi}_i^t(\widetilde{\omega})$ — независимые копии $\xi_i^t(\omega)$ (формально, перейдём от вероятностного пространства Ω к $\Omega\times\Omega$). Используем, что $|\mathsf{E}\eta| \leqslant \mathsf{E}|\eta|$. При фиксированном ω имеем:

$$|\sum_{i=1}^m \xi_t^i - \mathsf{E}\xi_t^i| \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\omega}}|\sum_{i=1}^m \xi_t^i - \widetilde{\xi}_t^i|.$$

Возьмём $\sup_t$ и E_ω, а потом воспользуемся симметричностью распределения $\xi_i^t - \widetilde{\xi}_i^t$:

$$\mathsf{E}\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^m \xi_t^i - \mathsf{E}\xi_t^i| \leqslant \mathsf{E}_\omega \sup_{t\in T}\mathsf{E}_{\widetilde{\omega}}|\sum_{i=1}^m \xi_t^i - \widetilde{\xi}_t^i| \leqslant \mathsf{E}_\omega\mathsf{E}_{\widetilde{\omega}}\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^m \xi_t^i - \widetilde{\xi}_t^i| =$$
$$= \mathsf{E}\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^m \xi_t^i - \widetilde{\xi}_t^i| = \mathsf{E}\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i(\xi_t^i - \widetilde{\xi}_t^i)| \leqslant 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\xi_t^i|.$$

Контракция (см. [1, Th. 4.12]). Зафиксируем $\omega\in\Omega$. Каждому $t\in T$ соответствует вектор $(\xi_1^t(\omega),\dots,\xi_m^t(\omega))$ в $\mathbb{R}^m$. Поэтому достаточно доказать следующее неравенство для векторного множества $T\subset\mathbb{R}^m$:

$$\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\varphi_i(t_i)\right| \leqslant 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i\right|, \tag{2}$$

где мат. ожидание берётся по знакам. Отсюда после подстановке значений ξ_i^t и усреднения по ω мы получим (1).

Далее мы докажем, что для выпуклой неубывающей функции G имеем

$$\mathsf{E}G(\sup_{t\in T}\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\varphi_i(t_i)) \leqslant \mathsf{E}G(\sup_{t\in T}\sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i). \tag{3}$$

Выведем из этого неравенства неравенство (2). Обозначим $x_+ := \max\{x,0\}$, $x_- := \max\{-x,0\}$, тогда $|x| = x_+ + x_-$. Далее,

$$\mathsf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\varphi_i(t_i)\right| = \mathsf{E}\sup_{t\in T}[(\sum_{i=1}^m \dots)_+ + (\sum_{i=1}^m \dots)_-] \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\sup_{t\in T}(\sum_{i=1}^m \dots)_+ + \mathsf{E}\sup_{t\in T}(\sum_{i=1}^m \dots)_- = 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\varphi_i(t_i))_+$$

Применяя (3) для $G(u) = u_+$, продолжаем неравенство:

$$2\mathsf{E}\sup_{t\in T}(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\varphi_i(t_i))_+ \leqslant 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i)_+ \leqslant 2\mathsf{E}\sup_{t\in T}|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i|,$$

и неравенство (2) доказано.

Осталось доказать (3). Общий случай сводится к следующему: $T \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mathsf{E}G(\sup_{t\in T} t_1 + \varepsilon\varphi(t_2)) \leqslant \mathsf{E}G(\sup_{t\in T} t_1 + \varepsilon t_2). \tag{4}$$

Действительно, фиксируя значения всех знаков, кроме ε_k, и применяя это неравенство, мы заменим в (3) слагаемое $\varphi_k(t_k)$ на t_k; так нужно сделать для всех k.

Левая часть (4) равна

$$L = \frac{1}{2}G(t_1 + \varphi(t_2)) + \frac{1}{2}G(s_1 - \varphi(s_2))$$

для оптимальных $t, s \in T$. В силу оптимальности,

$$t_1 + \varphi(t_2) \geqslant s_1 + \varphi(s_2), \quad s_1 - \varphi(s_2) \geqslant t_1 - \varphi(t_2). \tag{5}$$

Доказательство разбивается на случаи.

1) $t_2 \geqslant 0$, $s_2 \geqslant 0$. а) $s_2 \leqslant t_2$. Докажем, что

$$2L \leqslant G(t_1 + t_2) + G(s_1 - s_2).$$

Запишем это неравенство в виде

$$G(a) - G(b) \leqslant G(a') - G(b'), \tag{6}$$

где $a = s_1 - \varphi(s_2)$, $b = s_1 - s_2$, $a' = t_1 + t_2$, $b' = t_1 + \varphi(t_2)$. Имеем $a \geqslant b$ в силу условия на φ. Далее, $b' \geqslant b$ в силу (5). Далее, в силу свойства контракции,

$$a - b = s_2 - \varphi(s_2) \leqslant t_2 - \varphi(t_2) = a' - b'.$$

Поскольку G выпукла и неубывает, при $h \geqslant 0$ разность $G(\cdot + h) - G(\cdot)$ неубывает, следовательно т.к. $b \leqslant b'$,

$$G(a) - G(b) \leqslant G(b' + (a - b)) - G(b').$$

Остаётся использовать неравенство $b' + (a - b) \leqslant a'$ и мы получаем (6)

Остальные случаи разбираются аналогично.

Список литературы

[1] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces.*