Введение в теорию восстановления сигналов
Лекция 4. Восстановление разреженных сигналов.

21 марта 2026 г.

Разреженные сигналы. Вектор $x \in \mathbb{C}^N$ называется s-разреженным (sparse), если у него не более s ненулевых координат. Это свойство нелинейно: сумма двух s-разреженных векторов является $2s$-разреженной.

Задача восстановления: известно, что x является s-разреженным; требуется найти x, используя небольшое число линейных измерений

$$y = Ax, \quad A \in \mathbb{C}^{m \times N}.$$

Примеры разреженных сигналов.

1. Изображения. Типичные пиксельные изображения (например, фотографии) являются разреженными или аппроксимативно разреженными в подходящем базисе (базисе всплесков). На этом основан стандарт сжатия JPEG. Возможность восстановления позволяет проектировать фотоаппараты, в которых не запоминаются все пиксели, а лишь проводится небольшое число измерений.

2. Каналы мобильной связи. При передаче символа $X \in \mathbb{C}$ от пользователя к базовой станции на частоте λ станция получает сигнал

$$Y = H(\lambda)X, \quad H(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} c_k \exp(-2\pi i \lambda \tau_k).$$

Здесь "разреженным сигналом" является сам канал H. Он состоит из небольшого числа s "лучей", каждый из которых идёт со своей задержкой τ_k из-за дополнительных отражений. Измерениями являеются значения $H(\lambda)$ на выделенных пользователю частотах.

Восстановление разреженных сигналов можно считать частью более общей науки — разреженной аппроксимации. Пусть $\{A^j\}$ — множество столбцов матрицы A. Запишем равенство $y = Ax$ в следующем виде:

$$y = \sum_{k=1}^{s} x_{j_k} A^{j_k}.$$

Таким образом, вектор y есть линейная комбинация (s-членная комбинация) небольшого числа элементов $\mathcal{D} := \{A^j\}$; множество $\mathcal{D}$ в этом контексте называется словарём. Разреженная аппроксимация изучает возможность приближения векторов s-членными комбинациями, а также алгоритмы нахождения коэффициентов.

Приложения M^*-оценки. Вернёмся к M^*-оценке. Напомним следствие из неё. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ выпуклое центрально-симметричное тело. Рассмотрим задачу

$$\text{найти } x'\colon \quad x' \in K, \quad Ax' = y. \tag{1}$$

Следствие. *Пусть A — случайная гауссовская матрица, состоящая из независимых гауссовских величин, $A_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Тогда для любого $x \in K$ и решения $\hat{x} := \varphi(y)$, $y = Ax$, задачи* (1) *справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}\|x - \hat{x}\|_2 \leqslant Cm^{-1/2}w(K).$$

Рассмотрим теперь другую задачу, в которой уже не фигурирует множество K:

$$\|x'\|_1 \to \min, \quad Ax' = y. \tag{2}$$

Следствие. *Пусть A — случайная гауссовская матрица, состоящая из независимых гауссовских величин, $A_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Тогда для любого x, такого что*

$$(\|x\|_1/\|x\|_2)^2 \leqslant s, \tag{3}$$

и решения $\hat{x}$ задачи (2) *справедливо неравенство:*

$$\mathsf{E}\|x - \hat{x}\|_2 \leqslant C\sqrt{\frac{s\log N}{m}}\|x\|_2.$$

Доказательство. Нормируем: $\|x\|_2 = 1$, тогда $x \in K := \sqrt{s}B_1^N$. Поскольку x' минимизирует ℓ_1-норму, он тоже попадает в K. Значит, $\|\hat{x} - x\|_2 \leqslant \operatorname{diam}(K \cap \operatorname{Ker} A)$ и применима M^*-оценка:

$$\mathsf{E}\operatorname{diam}(K \cap \operatorname{Ker} A) \lesssim m^{-1/2}w(K) = m^{-1/2}s^{1/2}\mathsf{E}\|Z\|_\infty \lesssim \sqrt{\frac{s\log N}{m}}.$$

□

Замечание: следствие применимо и для s-разреженных векторов, поскольку для них выполняется неравенство (3). Также следствие даёт оценку

$$\operatorname{diam}(B_1^N \cap \operatorname{Ker} A) \leqslant C\sqrt{\log(N)/m}.$$

Докажем теперь правильную по порядку оценку.

Теорема 1. $d^m(B_1^N, \ell_2^N) \leqslant C\sqrt{\frac{\log(2N/m)}{m}}$.

Эта оценка сверху была получена в известной работе Кашина 1977 года (с другой степенью логарифма) и уточнена в работе Гарнаева и Глускина. В терминах поперечника по Колмогорову это даёт равномерное (и очень хорошее) приближение евклидова шара.

Случайные подпространства дают нужное сечение октаэдра с очень большой вероятностью. Однако конструктивных примеров не известно.

Пусть $S_{N,s}$ это множество s-разреженных векторов в B_2^N.

Лемма. $\operatorname{conv} S_{N,s} \subset \sqrt{s}B_1^N \cap B_2^N \subset 2\operatorname{conv} S_{N,s}$.

Напомним обозначение: $x_1^* \geqslant x_2^* \geqslant \ldots$ это упорядоченная по убыванию последовательность модулей координат вектора x.

Доказательство. Первое вложение следует из того, что для k-мерного вектора $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{k}\|x\|_2$, применяем это для $k = s$.

Для доказательства второго вложения представим вектор $x \in \sqrt{s}B_1^N \cap B_2^N$ в виде $x = x^{(0)} + x^{(1)} + \ldots$, где в $x^{(0)}$ находятся s наибольших по модулю координат x (остальные нули), в $x^{(1)}$ следующие s, и т.д. Покажем, что $\sum \|x^{(j)}\|_2 \leqslant 2$, откуда

$$x = \sum_{j\geqslant 0} \|x^{(j)}\|_2 \frac{x^{(j)}}{\|x^{(j)}\|_2} \in 2\operatorname{conv} S_{N,s}.$$

Имеем $\|x^{(0)}\|_2 \leqslant \|x\|_2 \leqslant 1$. Для $j \geqslant 1$ имеем

$$\|x^{(j)}\|_2^2 = \sum_{i=js+1}^{(j+1)s} (x_i^*)^2 \leqslant (x_{js}^*)^2 \sum_{i=js+1}^{(j+1)s} x_i^* \leqslant \frac{1}{s} \sum_{i=(j-1)s+1}^{(j-1)s} x_i^* \cdot \sum_{i=js+1}^{js} x_i^* \leqslant \frac{1}{s}\|x^{(j-1)}\|_1^2.$$

Отсюда $\sum_{j\geqslant 1} \|x^{(j)}\|_2 \leqslant s^{-1/2} \sum_{j\geqslant 0} \|x^{(j)}\|_1 \leqslant 1$. □

Перейдём к доказательству теоремы 1

Доказательство. Мы будем применять M^*-оценку, но не к октаэдру B_1^N, а к пересечению $B_1^N \cap rB_2^N$. Есть трюк: если мы докажем, что

$$(B_1^N \cap rB_2^N) \cap V^m \subset \rho B_2^N$$

для некоторого $\rho < r$, то тогда

$$B_1^N \cap V^m \subset \rho B_2^N.$$

Действительно, если бы в сечении нашлась точка с евклидовой нормой больше ρ, то нашлась бы точка с евклидовой нормой из интервала (ρ, r), что противоречит предыдущему утверждению. Для оценки диаметра сечения $B_1^N \cap rB_2^N$ мы применим M^*-оценку, которая даёт существование подпространства V^m коразмерности m, для которого

$$\operatorname{diam}(B_1^N \cap rB_2^N \cap V^m) \leqslant Cm^{-1/2} w(B_1^N \cap rB_2^N).$$

Положим $r = s^{-1/2}$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, тогда в силу леммы

$$w(B_1^N \cap s^{-1/2}B_2^N) = s^{-1/2} w(\sqrt{s}B_1^N \cap B_2^N) \leqslant 2s^{-1/2} w(S_{N,s}).$$

Докажем неравенство

$$w(S_{N,s}) \leqslant C\sqrt{s\log(2N/s)}. \tag{4}$$

Имеем по определению

$$\mathsf{E} \max_{x\in S_{N,s}} \langle Z, x\rangle = \mathsf{E} \max_{S\subset[N],\, |S|=s} \|Z_S\|_2.$$

Напомним определение: случайная величина ζ называется субгауссовой, если

$$\mathsf{E}\exp(\zeta^2/K^2) \leqslant 2$$

для некоторого $K > 0$. Минимально возможное K называется субгауссовой нормой ζ. Нетрудно видеть, что стандартная нормальная случайная величина Z_1 является субгауссовой; её норма меньше 2: $\mathsf{E}\exp(Z_1^2/4) \leqslant 2$. Воспользуемся этим. Фиксируем $S \subset [N]$ мощности $|S| = s$.

$$\mathsf{P}(\|Z_S\|_2 > t) = \mathsf{P}(Z_1^2 + \ldots + Z_s^2 > t^2) = \mathsf{P}(\exp(Z_1^2/4 + \ldots + Z_s^2/4) > \exp(t^2/4)) \leqslant \\ \leqslant \frac{\mathsf{E}\exp(\sum Z_k^2/4)}{\exp(t^2/4)} = \exp(-t^2/4)\prod_{k=1}^{s}\mathsf{E}\exp(Z_k^2/4) \leqslant 2^s\exp(-t^2/4).$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(\max_S \|Z_S\|_2 > t) \leqslant \#\{S\} \cdot 2^s\exp(-t^2/4) = \binom{N}{s}2^s\exp(-t^2/4) \leqslant \\ \leqslant (eN/s)^s 2^s \exp(-t^2/4) = \exp(-t^2/4 + s\ln(2eN/s)).$$

Ясно, что при $t > C\sqrt{s\ln(2eN/s)}$ эта величина меньше $\exp(-t^2/5)$. Отсюда легко вывести, что $\mathsf{E}\max_S \|Z_S\|_2 \leqslant C\sqrt{s\ln(2eN/s)}$. Неравенство (4) доказано.

Итак, в силу M^*-оценки, леммы и (4), имеем

$$\operatorname{diam}(B_1^N \cap s^{-1/2}B_2^N \cap V^m) \leqslant C\sqrt{\log(2N/s)/m}$$

для подходящего V^m. Если мы подберём s так, что величина в правой части меньше $s^{-1/2}$, то получим оценку диаметра сечения октаэдра:

$$C\sqrt{\log(2N/s)/m} < s^{-1/2} \quad \text{при } s = C_1 m/\log(2N/m).$$

При таком s получаем оценку на диаметр $C\sqrt{\log(2N/m)/m}$, что и требовалось. □

Точное восстановление. Для разреженных векторов возможно точное восстановление, с нулевой ошибкой. Точное восстановление разреженных векторов — ядро теории Compressed Sensing ("сжатые" или "экономные" измерения).

Итак, рассмотрим задачу восстановления s-разреженного вектора x по вектору $y = Ax$.

Утверждение. *Следующие свойства матрицы A равносильны:*

- *решение задачи единственно для любого s-разреженного x;*
- *любые $2s$ столбцов линейно независимы;*
- $\operatorname{Ker} A$ *не содержит $2s$-разреженных векторов (кроме 0).*

Действительно, если $Ax = Ax'$ и $\|x\|_0 \leqslant s$, $\|x'\|_0 \leqslant s$, то $v := x - x'$ является $2s$-разреженным и лежит в ядре, а $2s$ столбцов, соответствующих носителю вектора v, будут линейно зависимы.

Следовательно, необходимым условием для однозначного восстановления является $2s \leqslant \operatorname{rank} A \leqslant m$.

Утверждение. *Если $N \geqslant 2s$, то существует измерительная матрица $m \times N$, $m = 2s$, с однозначным восстановлением.*

В качестве A можно взять матрицу $A_{i,j} = t_j^i$, $i = 0, \dots, 2s-1$, $j = 1, \dots, N$, где $\{t_j\}$ попарно различны. Тогда матрица, образованная любыми $2s$ столбцами, является матрицей Вандермонда и невырождена.

Проблема, однако, заключается в том, как найти решение? Если знать носитель S вектора, то задача сводится к решению линейной системы уравнений $A^S x_S = y$. Однако для S есть $\binom{N}{s}$ вариантов, что очень велико при больших s.

Basis pursuit. Мы уже встречались с алгоритмом ℓ_1-минимизации. Он называется Basis pursuit (преследование базиса?):

$$\|x'\|_1 \to \min, \quad Ax' = y. \tag{5}$$

Это задача выпуклой оптимизации и она может быть эффективно решена численно.

Покажем, что в результате решения задачи BP получается достаточно разреженный вектор (над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$).

Утверждение. *Если $\hat{x}$ — единственное решение задачи* (5), *$S := \operatorname{supp} \hat{x}$, то столбцы $\{A^j : j \in S\}$ линейно независимы (над $\mathbb{R}$). В частности, $\|x\|_0 \leqslant m$.*

Доказательство. Если это не так, то найдётся вектор $v \in \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{supp} v \subset S$. Покажем, что можно “пошевелить” $\hat{x}$, не увеличив норму. При малых t имеем для $i \in S$:

$$|(\hat{x} + tv)_i| = \operatorname{sign}(\hat{x} + tv)_i \cdot (\hat{x} + tv)_i = \operatorname{sign} \hat{x}_i \cdot (\hat{x}_i + tv_i) = |\hat{x}_i| + tv_i \operatorname{sign} \hat{x}_i.$$

Суммируя по i, получим $\|\hat{x}+tv\|_1 = \|\hat{x}\|_1 + t \cdot (\dots)$, что не меньше $\|\hat{x}\|_1$ при малых t подходящего знака. ∎

Достаточные условия восстановления для BP.

Определим свойство нуль-пространства (ядра) — Null-space property (NSP). Требуется, чтобы для любого множества $S \subset [N]$, $|S| = s$, и любого $v \in \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$ было справедливо неравенство

$$\|v_S\|_1 < \|v_{\overline{S}}\|_1.$$

(Здесь $\overline{S}$ это дополнение S.) То есть, на малом множестве не может набираться половина ℓ_1-нормы.

Утверждение. *Решение задачи* (5) *единственно и совпадает с x для любого s-разреженного x тогда и только тогда, когда A обладает NSP.*

Доказательство. Пусть выполнено NSP, но для s-разреженного вектора x решением задачи является другой вектор $\hat{x}$; покажем, что $\|\hat{x}\|_1 > \|x\|_1$, что даст противоречие. Рассмотрим ошибку $v = \hat{x} - x$; $v \in \operatorname{Ker} A$. Тогда

$$\|\hat{x}\|_1 = \|\hat{x}_S\|_1 + \|\hat{x}_{\overline{S}}\|_1 \geqslant \|x_S\|_1 - \|v_S\|_1 + \|v_{\overline{S}}\|_1 > \|x\|_1.$$

Обратно, пусть $v \in \operatorname{Ker} A$, $|S| = s$. Возьмём $x = v_S$, $y = Av_S$, решение BP совпадает с x. Но $A(v_S + v_{\overline{S}}) = 0$, поэтому $w = -v_{\overline{S}}$ также удовлетворяет $Aw = y$. Но в силу единственности, $\|w\|_1 > \|v_S\|_1$, что и даёт NSP. □

Свойство поперечника. (Width property, WP). Это следующее свойство матрицы:

$$\forall v \in \operatorname{Ker} A \quad \frac{\|v\|_2}{\|v\|_1} < \frac{1}{2\sqrt{s}}.$$

Нетрудно видеть, что WP влечёт NSP (с тем же s). Действительно, нормируем $\|v\|_2 = 1$ тогда $\|v_S\|_1 \leqslant \sqrt{s}$, но в силу WP имеем $\|v\|_1 > 2\sqrt{s}$, то есть на S меньше половины ℓ_1-нормы.

В силу теоремы 1, мы можем обеспечить WP для $s \asymp m/\log(2N/m)$. Другими словами, для эффективного восстановления s-разреженных векторов достаточно

$$m \asymp s \log(2N/s)$$

измерений.