Введение в теорию восстановления сигналов
Лекция 5. Свойство ограниченной изометрии и когерентность

28 марта 2026 г.

Свойство ограниченной изометрии (Restricted Isometry Property, RIP). Скажем, что матрица A обладает RIP-свойством порядка s с параметром $\delta \in (0,1)$, если

$$(1-\delta)|x|^2 \leqslant |Ax|^2 \leqslant (1+\delta)|x|^2, \quad \forall x\colon \|x\|_0 \leqslant s.$$

Здесь и далее мы для краткости пишем $|x| := \|x\|_2$.

Через $\delta_s(A)$ обозначим минимальное δ, для которого выполнено RIP-свойство порядка s.

Утверждение. *Если для матрицы A выполняется RIP-свойство порядка s, то*

$$\forall u \in \operatorname{Ker} A \quad \frac{\|u\|_2}{\|u\|_1} \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\delta}}\, s^{-1/2}, \quad \delta := \delta_s(A).$$

Доказательство. Пусть $\delta := \delta_s(A)$. Возьмём $u \in \operatorname{Ker} A$, $\|u\|_1 = 1$, и оценим сверху $|u|$. Разложим u в сумму $u^{(0)} + u^{(1)} + \ldots$, где в $u^{(0)}$ лежат s наибольших по модулю координат, в $u^{(1)}$ следующие s, и т.д. Имеем $|u|_2^2 = |u^{(0)}|_2^2 + |\sum_{j\geqslant 1} u^{(j)}|_2^2$. Оценим второе слагаемое:

$$|\sum_{j\geqslant 1} u^{(j)}|_2^2 = \sum_{i>s} (u_i^*)^2 \leqslant u_s^* \sum |u_i| \leqslant s^{-1}.$$

Теперь оценим первое слагаемое, используя, что $Au = 0$ и предыдущую оценку:

$$(1-\delta)|u^{(0)}|^2 \leqslant |Au^{(0)}|^2 = |A(-\sum_{j\geqslant 1} u^{(j)})|^2 \leqslant (\sum_{j\geqslant 1} |Au^{(j)}|)^2 \leqslant (1+\delta)(\sum_{j\geqslant 1} |u^{(j)}|)^2.$$

Далее,

$$|u^{(j)}|^2 = \sum_{i=js+1}^{(j+1)s} (u_i^*)^2 \leqslant u_{js}^* \sum_{i=js+1}^{(j+1)s} u_i^* \leqslant \frac{1}{s} \sum_{i=(j-1)s+1}^{(j-1)s} u_i^* \cdot \sum_{i=js+1}^{(j+1)s} u_i^* \leqslant \frac{1}{s}\|u^{(j-1)}\|_1^2,$$

откуда

$$(1-\delta)|u^{(0)}|^2 \leqslant (1+\delta)s^{-1}(\sum_{j\geqslant 0} \|u^{(j)}\|_1)^2 \leqslant (1+\delta)s^{-1}.$$

Суммируя оценки, получаем нужное неравенство. $\square$

Следствие. *Если $\delta_{9s}(A) < 1/9$, то выполнено свойство поперечника с параметром s.*

Доказательство. Действительно, на ядре имеем:

$$\|u\|_2/\|u\|_1 \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\delta}}(9s)^{-1/2} < \sqrt{\frac{2}{1-1/9}}(9s)^{-1/2} = \frac{1}{2s^{1/2}}.$$

□

На следующей лекции мы докажем более теорему с условием на δ_{2s}.

Когерентность. Проблема с RIP/WP/NSP свойствами в том, что не известно явных примеров матриц с минимальным по порядку кол-вом измерений, обладающих этими свойствами.

Обратимся теперь к более простому свойству, для которого экстремально хорошие матрицы явно строятся.

Когерентностью матрицы A называется величина

$$\mu(A) := \max_{i\neq j} \frac{|\langle A^i, A^j\rangle|}{|A^i|\cdot|A^j|},$$

где $\{A^i\}$ это столбцы матрицы.

Далее в этом разделе предполагаем, что столбцы A нормированы в ℓ_2.

Напомним определение жёсткого фрейма: это такая система векторов $\{\varphi_k\} \subset \mathbb{C}^m$, что

$$|x|^2 = B\sum_{k=1}^{N} |\langle x, \varphi_k\rangle|^2, \quad \forall x \in \mathbb{C}^m.$$

Нетрудно проверить, что при $B = 1$ это эквивалентно тому, что $\{\varphi_k\}$ является ортопроекцией ортонормированного базиса в большем пространстве. Поэтому матрица A, в которой по столбцам расположены $\{\varphi_k\}$, является частью ортогональной матрицы и её строки ортогональны. В общем случае, условие фрейма эквивалентно следующему:

$$\Phi\Phi^* = \frac{1}{B}\mathrm{Id}_m, \tag{1}$$

где $\{\varphi_k\}$ это столбцы Φ.

Фрейм называется равноугольным, если $|\langle\varphi_k, \varphi_m\rangle| = \mathrm{const}$, $k \neq m$.

Теорема (Welch bound)**.** *Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ справедливо неравенство*

$$\mu(A) \geqslant \sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}}.$$

Равенство достигается на матрицах, столбцы которых представляют собой равноугольный жёсткий фрейм.

Доказательство. Рассмотрим $G := A^*A$ и $H := AA^*$. Первая матрица это матрица Грама системы столбцов A. Имеем

$$\operatorname{tr} G = \sum_{i=1}^{N} |A^i|^2 = N.$$

Далее мы используем скалярное произведение матриц $\langle U, V\rangle = \sum_{i,j} U_{i,j}\overline{V_{i,j}}$ и норму Фробениуса $\|U\|_F := \langle U, U\rangle^{1/2} = (\sum |U_{i,j}|^2)^{1/2}$. Также $\|U\|_F^2 = \operatorname{tr}(UU^*)$. Продолжим:

$$\operatorname{tr} G = \operatorname{tr} H = \langle H, \mathrm{Id}_m\rangle \leqslant \|H\|_F \|\mathrm{Id}_m\|_F = m^{1/2}\sqrt{\operatorname{tr}(HH^*)}. \tag{2}$$

Далее,

$$\operatorname{tr}(HH^*) = \operatorname{tr}(AA^*AA^*) = \operatorname{tr}(A^*AA^*A) = \operatorname{tr}(GG^*) = \sum_{i,j=1}^{N} |\langle A^i, A^j\rangle|^2 \leqslant N + (N^2 - N)\mu. \tag{3}$$

Собирая всё вместе, получаем

$$N^2 \leqslant m \cdot (N + (N^2 - N)\mu).$$

Это и есть нужная оценка. Для достижения равенства необходимо и достаточно равенства в (2), что даёт $AA^*H = c\,\mathrm{Id_m}$ (т.е. в силу (1) стоблцы A образуют фрейм) и равенства в последнем неравенстве (3), что даёт равноугольность. □

Итак, при $m < N/2$ когерентность лучше $O(1/\sqrt{m})$ получить нельзя.

Примеры матриц с малой когерентностью.

Пример 1. Пусть G — матрица Грама векторов $V^1, \ldots, V^N$, каждый из которых состоит из m случайных независимых знаков: $V^j = m^{-1/2}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$. Оценим когерентность G.

При фиксированных $i < j$ имеем $\langle V^i, V^j\rangle = m^{-1}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m)$. Применим стандартную оценку Hoeffding: если случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ имеют нулевое среднее: $\mathsf{E}X_k = 0$, ограничены: $a_i \leqslant X_k \leqslant b_i$, то

$$\mathsf{P}(|\sum_{k=1}^{m} X_k| > t) \leqslant 2\exp(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^{m}(b_i - a_i)^2}).$$

Отсюда $\mathsf{P}(|\langle V^i, V^j\rangle| > t) \leqslant 2\exp(-\frac{1}{2}mt^2)$. При $t \geqslant t^* = Cm^{-1/2}\log^{1/2} N$ эта вероятность меньше N^{-2}. Применяя union bound по всем парам (i, j), получим, что с положительной вероятностью $\max_{i<j} |\langle V^i, V^j\rangle| < t^*$. Это и даёт оценку когерентности

$$\mu(G) \lesssim \sqrt{\frac{\log N}{m}}.$$

Пример 2. Если N зависит от m полиномиально, то оценку можно улучшить: во-первых, избавиться от логарифма, во-вторых, привести конструктивный пример матрицы. Это делает так: фиксируем число d. Возьмём достаточно большое простое p и рассмотрим поле $\mathbb{F}_p$. Будем строить векторы размерности p^2. Каждому многочлену $P \in \mathbb{F}_p[x]$ степени не выше d

сопоставим индикатор его графика: вектор $v_P\colon \mathbb{F}_p^2 \to \mathbb{R}$, определяемый как индикатор графика P. Т.е. на местах $(x, P(x))$ он равен 1, на остальных местах нулевой. Точнее, индикатор нужно нормировать на $p^{1/2}$. Тогда

$$\langle v_P, v_Q\rangle = p^{-1}\#\{x\colon P(x) = Q(x)\} \leqslant d/p.$$

Итак, размерность $m = p^2$, количество векторов $N = p^{d+1}$, матрица Грама системы $\{v_P\}$ имеет когерентность $\mu(G) = d/p$.

Условие точного восстановления для BP.

Утверждение. *Если $(2s-1)\mu(A) < 1$, то алгоритм BP в точности восстанавливает любой s-разреженный вектор.*

Доказательство. Выведем из условия теоремы Nullspace property: для $|S| = s$ и $v \in \operatorname{Ker} A$: $\|v_S\|_1 < \|v_{\overline{S}}\|_1$. Поскольку $v \in \operatorname{Ker} A$, то $\sum v_j A^j = 0$. Выразим отсюда v_i, $i \in S$, взяв скалярное произведение с A^i (считаем, что столбцы нормированы):

$$v_i = -\sum_{j\neq i} v_j\langle A^i, A^j\rangle = -\sum_{j\in\overline{S}}\langle A^i, A^j\rangle - \sum_{j\in S, j\neq i}\langle A^i, A^j\rangle.$$

Отсюда

$$|v_i| \leqslant \mu\sum_{j\in\overline{S}}|v_j| + \mu\sum_{j\in S, j\neq i}|v_j|.$$

Суммируя по $i \in S$, получим

$$\|v_S\|_1 \leqslant \mu s\|v_{\overline{S}}\|_1 + \mu(s-1)\|v_S\|_1$$

(во втором слагаемом каждый член $|v_j|$ возникнет ровно $s-1$ раз). Отсюда

$$\|v_S\|_1 \leqslant \frac{\mu s}{1-\mu(s-1)}\|v_{\overline{S}}\|_1.$$

В силу условия, коэффициент меньше единицы и мы получаем NSP. □

Алгоритм OMP/OGA. Сначала мы опишем алгоритм в более общей ситуации, в которой он называется Ортогональным Жадным Алгоритмом (OGA).

Пусть H — гильбертово пространство, $\mathcal{D} \subset H$ — некоторый словарь, т.е. множество, состоящее из векторов единичной нормы. Задача состоит в разложении вектора $f \in H$ по словарю, т.е. его представлении в виде $f = \sum c_k g_k$, $g_k \in \mathcal{D}$, либо аппроксимации таким представлением из n слагаемых (n-членные приближения).

Алгоритм OGA. Пусть $f \in H$. Определим последовательность приближений G_k и остатков r_k следующим образом: $G_0 := 0$, $r_0 := f$. При $k \geqslant 1$ эта последовательность определяется так. На k-м "жадном" шаге находим элемент словаря g_k:

$$g_k := \arg\max_{g\in\mathcal{D}} |\langle r_k, g\rangle|. \tag{4}$$

Далее в качестве G_k берём ортопроекцию на подпространство, натянутое на уже построенные элементы словаря:

$$G_k := \mathrm{proj}_{\mathrm{span}\{g_1,\ldots,g_k\}} f, \quad r_k := f - G_k.$$

Шаг называется "жадным", поскольку мы стремимся оптимизировать приближение остатка одним новым элементом; глобально такая стратегия может быть не оптимальной. Отметим, что в случае конечного словаря максимум в (4) всегда достигается.

Вернёмся в конечномерную ситуацию. Пусть A — матрица со столбцами единичной ℓ_2-нормы. Задача состоит в нахождении вектора коэффициентов x по вектору $y = Ax$, т.е. разложение происходит по словарю, состоящему из столбцов матрицы A. Запишем ортогональный жадный алгоритм в этих терминах.

Алгоритм OMP. Строим носители $S_k \subset \{1,\ldots,N\}$, векторы коэффициентов $x_k \in \mathbb{C}^m$, $\mathrm{supp}\, x_k \subset S_k$, аппроксимацию $y_k := Ax_k$, остаток $r_k := y - y_k$. На нулевом шаге $S_0 := \varnothing$, $x_0 = 0$. На k-м шаге полагаем

$$i_k := \arg\max_i |(A^* r_k)_i|,$$

$S_k := S_{k-1} \sqcup \{i_k\}$, далее

$$x_k := \arg\min_{\mathrm{supp}\, x \subset S_k} \|Ax - y\|_2.$$

Проверьте эквивалентность OMP и OGA.

В общей постановке аналогично конечномерному случаю определяются когерентность и разреженность.

Утверждение. *Если $(2s-1)\mu(\mathcal{D}) < 1$, то алгоритм OGA в точности восстанавливает любой s-разреженный вектор за s шагов.*

Следствие: при таком условии s-разреженное представление всегда единственно.

Доказательство. Пусть $f = \sum_{k=1}^{s} c_k g_k$. Покажем, что на первом шаге OGA выберет "правильный" элемент словаря, т.е. элемент из $\{g_k\}$. Действительно, пусть $c_1 = 1$ это максимальный по модулю коэффициент. Тогда

$$\langle f, g_1\rangle = 1 + \sum_{k=2}^{s} c_k \langle g_k, g_1\rangle \geqslant 1 - (s-1)\mu.$$

С другой стороны, если $g \notin \{g_k\}$, то

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant s\mu.$$

Следовательно, при $(2s-1)\mu < 1$ все "неправильные" скалярные произведения меньше чем некоторые "правильные".

После ортопроекции мы также не выходим из множества правильных коэффициентов.

После s шагов мы добавим все $\{g_k\}$ (по одному разу, поскольку r_k ортогонален уже добавленным элементам), и после ортопроекции получим в точности f. $\square$

Следующий результат не использует когерентность и, вообще, какие-либо свойства словаря. Обозначим $\mathcal{A}_1(\mathcal{D}) := \overline{\mathrm{conv}(\mathcal{D} \cup (-\mathcal{D}))}$.

Утверждение. *Если $f \in \mathcal{A}_1(\mathcal{D})$, то после k шагов алгоритма OGA имеем $|r_k| \leqslant k^{-1/2}$.*

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{A}_1(\mathcal{D})$, мы можем считать, что $f = \sum c_k h_k$, $h_k \in \mathcal{D}$, $\sum |c_k| \leqslant 1$. Для начала отметим, что $|f| \leqslant \sum |c_k| \leqslant 1$.

Для произвольного $h \in H$ положим $\rho(h) := \sup_{g \in \mathcal{D}} \frac{|\langle g,h \rangle|}{|h|}$. Отметим, что после одного жадного шага для h имеем

$$|r|^2 = |h - \langle h, g_1 \rangle g_1|^2 = |h|^2(1 - \rho^2(h)).$$

Оценим последовательность норм остатков $a_k := |r_k|^2$ алгоритма OGA для f. Если бы мы применили один жадный шаг к r_k, то получили бы норму остатка больше, чем если применять ортогональный жадный шаг, ведь ортопроекция минимизирует норму по всем коэффициентам. Поэтому

$$|r_{k+1}|^2 \leqslant |r_k|^2(1 - \rho^2(r_k)).$$

Оценим величину ρ.

$$|r_k|^2 = \langle r_k, f \rangle = \langle r_k, \sum c_k h_k \rangle \leqslant \sum_k c_k \rho(r_k)|r_k| \leqslant \rho(r_k)|r_k|,$$

откуда $\rho(r_k) \geqslant |r_k|$. Итого, последовательность a_k удовлетворяет условиям $a_1 \leqslant |f| \leqslant 1$,

$$a_{k+1} \leqslant a_k(1 - a_k).$$

Отсюда легко вывести, что $a_k \leqslant 1/k$, что и требовалось. □

Множество $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ задаёт норму $|f|_{A_1} := \inf\{\lambda > 0 \colon f/\lambda \in \mathcal{A}_1(\mathcal{D})\}$, которая конечна на некотором подмножестве $H_1 \subset H$. Для функций с конечной A_1-нормой имеем оценку

$$|r_k| \leqslant |f|_{A_1} \cdot k^{-1/2}.$$