Введение в теорию восстановления сигналов
Лекция 6. Восстановление с шумом

4 апреля 2026 г.

Возможны два вида шума:

1) Шум в сигнале x. Можно предполагать, что $x \approx x^0$, где x^0 разреженный. Погрешность аппроксимации s-разреженными векторами обозначается как

$$\sigma_s(x)_X := \inf_{\|x^0\|_0 \leqslant s} \|x - x^0\|_X.$$

Наиболее интересна ℓ_2-норма, но хорошие теоретические результаты получаются для ℓ_1, т.е. они используют величину $\sigma_s(x)_1$.

Упражнение. *Докажите, что* $\sigma_s(x)_q \leqslant s^{-(1/p-1/q)}\|x\|_p$ *при* $q > p$.

2) Шум в измерениях. Это означает, что $y = Ax + w$. Возможны разные условия на вектор w; мы будем предполагать, что его ℓ_2-норма ограничена: $\|w\|_2 \leqslant \eta$. Заметим, что в постановке с шумом имеет смысл задача нахождения только $y^0 := Ax^0$; такая задача назывется "denoising" (избавление от шума).

Итак, пусть $y = Ax + w$ и известно, что $\|w\|_2 \leqslant \eta$. Можно учесть шум в алгоритме BP:

$$\|x'\|_1 \to \min, \quad \|Ax' - y\|_2 \leqslant \eta. \tag{BP$_\eta$}$$

Отметим, что в наших предположениях истинный вектор x попадает в область значений, которую пробегает x'.

Теорема. *Пусть* $m, N, s \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$, $\eta > 0$. *Если выполнено условие* $\delta_{2s}(A) \leqslant 4/\sqrt{41} = 0.62\ldots$, *то для любых* $x \in \mathbb{C}^N$ *и* $y \in \mathbb{C}^m$ *таких, что* $\|Ax - y\|_2 \leqslant \eta$, *решение* $\hat{x}$ *задачи* $(\mathrm{BP})_\eta$ *удовлеворяет неравенствам:*

$$\|x - \hat{x}\|_2 \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{s}}\sigma_s(x)_1 + C_2\eta, \tag{1}$$

$$\|x - \hat{x}\|_1 \leqslant C_1\sigma_s(x)_1 + C_2\eta\sqrt{s}. \tag{2}$$

Мы докажем теорему при более сильном предположении $\delta_{2s}(A) < 1/3$. Полное доказательство можно посмотреть в книге Foucart–Rauhut.

Доказательство. Нам потребуется усиление Nullspace Property (NSP). Скажем, что матрица обладает ℓ_2-робастным NSP (RNSP) порядка s с параметрами $\rho \in (0,1)$ и $c > 0$, если

$$\forall S, |S| = s \quad \forall v \in \mathbb{C}^N \ \ \|v_S\|_2 \leqslant \frac{\rho}{\sqrt{s}}\|v_{\overline{S}}\|_1 + c\|Av\|_2. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что это усиление NSP: если $v \in \operatorname{Ker} A$, то последнее слагаемое пропадает, $\|v_S\|_1 \leqslant s^{1/2}\|v_S\|_2 \leqslant \rho\|v_{\overline{S}}\|_1 < \|v_{\overline{S}}\|_1$, что и есть NSP.

Первый шаг доказательства: выведем из RIP свойство RNSP. Второй шаг — из RNSP выводим нужные оценки.

Первый шаг. Берём произвольный $v \in \mathbb{C}^N$. Запишем $v = v_0 + v_1 + \ldots$, где, как и раньше, в v_0 содержатся s наибольших по модулю координат, в v_1 следующие s, и т.д. Неравенство в (3) сложнее всего доказывать для $S = \operatorname{supp} v_0$.

Для краткости обозначим $\delta := \delta_{2s}(A)$ и пишем $|u|$ вместо $\|u\|_2$. Докажем следующее:

$$|\langle Av_0, Av_k\rangle| \leqslant \delta|v_0|\cdot|v_k|, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

Для этого возьмём единичные векторы $u = v_0/|v_0|$ и $w = e^{i\theta}v_k/|v_k|$, где фазовый множитель подобран так, что $|\langle Av_0, Av_k\rangle| = \langle Au, Aw\rangle \cdot |v_0| \cdot |v_k|$. Тогда (поляризационное тождество), используя ортогональность u и w:

$$4\langle Au, Aw\rangle = \langle A(u+w), A(u+w)\rangle - \langle A(u-w), A(u-w)\rangle \leqslant (1+\delta)|u+w|^2 - (1-\delta)|u-v|^2 = 4\delta.$$

Неравенство (4) доказано.

Далее, $|Av_0|^2 = (1+t)|v_0|^2$, где $|t| \leqslant \delta_s(A)$. Теперь мы можем оценить $|v_0|$:

$$\begin{aligned}(1+t)|v_0|^2 = |Av_0|^2 = \langle Av_0, A(v - \sum_{k\geqslant 1} v_k)\rangle = \langle Av_0, Av\rangle - \sum_{k\geqslant 1}\langle Av_0, Av_k\rangle \leqslant \\ \leqslant |Av_0|\cdot|Av| + \sum_{k\geqslant 1}\delta|v_0|\cdot|v_k| \leqslant \sqrt{1+t}\,|v_0|\cdot|Av| + \delta\sum_{k\geqslant 1}|v_0|\cdot|v_k|.\end{aligned}$$

Упрощая, получим неравенство

$$|v_0| \leqslant \frac{|Av|}{\sqrt{1+t}} + \frac{\delta}{1+t}\sum_{k\geqslant 1}|v_k|.$$

Как мы уже неоднократно оценивали, $|v_k| \leqslant s^{-1/2}\|v_{k-1}\|_1$, поэтому

$$\sum_{k\geqslant 1}|v_k| \leqslant s^{-1/2}\|v_0\|_1 + s^{-1/2}\|v_{\overline{S}}\|_1 \leqslant |v_0| + s^{-1/2}\|v_{\overline{S}}\|_1.$$

Снова упрощая, получим

$$|v_0|(1 - \frac{\delta}{1+t}) \leqslant \frac{|Av|}{\sqrt{1+t}} + \frac{\delta}{1+t}s^{-1/2}\|v_{\overline{S}}\|_1.$$

Используя тот факт, что $|t| \leqslant \delta_s(A) \leqslant \delta$, мы получим, что при $\delta < 1/3$ коэффициент при $|v_0|$ больше, чем при $\|v_{\overline{S}}\|_1$, что даст RNSP.

Второй шаг. Итак, дано свойство (3). Оценим сначала $\|\hat{x} - x\|_1$. Применим RNSP ко множеству S наибольших по модулю s координат x и вектору $v = \hat{x} - x$. Заметим следующее: $\|x_{\overline{S}}\|_1 = \sigma_s(x)_1 =: \sigma$, $|Av| = |A\hat{x} - Ax| \leqslant |A\hat{x} - y| + |y - Ax| \leqslant 2\eta$. В силу (3) имеем

$$\|v_S\|_1 \leqslant s^{1/2}|v_S| \leqslant \rho\|v_{\overline{S}}\|_1 + C\eta\sqrt{s}. \tag{5}$$

Запишем теперь следующие два простых неравенства:

$$\|v_{\overline{S}}\|_1 \leqslant \|x_{\overline{S}}\|_1 + \|\hat{x}_{\overline{S}}\|_1,$$

$$\|x\|_1 \leqslant \|x_{\overline{S}}\|_1 + \|v_S\|_1 + \|\hat{x}_S\|_1.$$

Складывая их и перенося $\|x\|_1$ в правую часть, получим

$$\|v_{\overline{S}}\|_1 \leqslant \|\hat{x}\|_1 - \|x\|_1 + \|v_S\|_1 + \sigma \leqslant \|v_S\|_1 + 2\sigma. \tag{6}$$

В последнем переходе мы использовали, что ℓ_1-норма $\hat{x}$ не больше, чем у x в силу задачи $(\mathrm{BP})_\eta$. Из неравенств (5), (6) мы получаем:

$$\|v_{\overline{S}}\|_1 \leqslant \frac{1}{1-\rho}(2\sigma + C\eta\sqrt{s}).$$

Теперь легко оценить всю норму:

$$\|v\|_1 = \|v_S\|_1 + \|v_{\overline{S}}\|_1 \leqslant (1+\rho)\|v_{\overline{S}}\|_1 + C\eta\sqrt{s} \leqslant \sigma\frac{2(1+\rho)}{1-\rho} + \eta\sqrt{s}C(1 + \frac{1+\rho}{1-\rho}).$$

Это и есть оценка (2)

Оценка в евклидовой норме: применяем RNSP ко множество S наибольших по модулю s координат вектора v. Тогда $|v_{\overline{S}}| \leqslant s^{-1/2}\|v\|_1$ по стандартным соображениям,

$$|v| \leqslant |v_S| + |v_{\overline{S}}| \leqslant \frac{\rho}{\sqrt{s}}\|v_{\overline{S}}\|_1 + C\eta + s^{-1/2}\|v\|_1 \leqslant C_2 s^{-1/2}\|v\|_1 + C\eta$$

и из ℓ_1-оценки вытекает ℓ_2-оценка. $\square$