

Спецкурс “Многомерная аппроксимация и анализ булевых функций”. Лекция 1: Проклятие размерности

12 октября 2026 г.

1 Примеры задач с проклятием размерности

Проклятие размерности возникает, когда количество параметров (точек для интегрирования, коэффициентов для аппроксимации и т.п.) растёт экспоненциально с размерностью d . Разберём несколько примеров таких задач.

Квадратурные формулы для класса Липшица. Задача: построить квадратурную формулу, т.е. формулу вида

$$\int_{[0,1]^d} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n a_j f(x_j).$$

Рассматривается погрешность в наилучшем смысле, т.е. берём максимум по некоторому классу $f \in F$. Далее оптимизируем по узлам и весам и получаем погрешность в задаче интегрирования на классе:

$$\text{err}_n^{\text{int}}(F) := \inf_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \\ x_1, \dots, x_n \in [0,1]^d}} \sup_{f \in F} \left| \int_{[0,1]^d} f(x) dx - \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) \right|.$$

Рассмотрим класс липшицевых функций

$$F_{\text{Lip}}^d := \{f: [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|_\infty\}.$$

Утверждение 1. Для любых $n, d \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{8} n^{-1/d} \leq \text{err}_n^{\text{int}}(F_{\text{Lip}}^d) \leq n^{-1/d}.$$

Следствие: при $n = 2^d$ погрешность отделена от нуля: $\text{err}_n \geq 1/16$.

Отметим также, что погрешность $n^{-1/d}$ соответствует типичной величине погрешности $n^{-r/d}$ в задачах для r -гладких функций d переменных.

Доказательство. Оценка сверху. Выбираем максимальное m , $m^d \leq n$, разбиваем куб на m^d кубов со стороной $1/m$, в качестве точек x_j берём центры этих кубиков, все веса — одинаковые. На каждом кубе $|f(x) - f(x_j)| \leq 1/(2m)$, поэтому функция f отличается от кусочно-постоянной функции со значениями $f(x_j)$ не более чем на $1/(2m)$, и интегралы отличаются не больше. Это даёт оценку сверху.

Оценка снизу. Пусть есть произвольная квадратурная формула с узлами $x_1, \dots, x_n$. Построим т.н. “fooling function” f , на которой будет большая погрешность. Положим

$$f(x) := \max_{1 \leq j \leq n} \|x - x_j\|_\infty.$$

Тогда $f(x_j) = 0$ для всех j и остаётся только оценить снизу интеграл от f . Опишем вокруг каждого x_j куб с ребром a . Подберём a так, что суммарный объём кубов не больше $1/2$, то есть $na^d = 1/2$ и $a = (2n)^{-1/d}$. Тогда вне объединения кубов имеем $f(x) \geq a/2$, поэтому $\int f(x) dx \geq a/4$, что даёт нужную оценку. $\square$

Замечание: доказательство проходит для произвольных формул вида $Q(f) = \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))$. Однако, в силу теоремы Смоляка, для восстановления линейного функционала (в нашем случае, интеграла) на выпуклом центрально-симметричном классе достаточно линейных методов.

Аппроксимация класса C^∞ . Рассмотрим теперь (более сложную) задачу L_∞ -аппроксимации на кубе. Для удобства рассмотрим куб $[-1, 1]^d$.

$$\text{err}_n^{\text{app}}(F) := \inf_{\substack{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x_1, \dots, x_n}} \sup_{f \in F} \|f - \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))\|_\infty.$$

Рассмотрим пространство $C^\infty[-1, 1]^d$, состоящее из функций, непрерывных вместе со всеми производными, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C^\infty} := \sup_{\alpha} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

В качестве функционального класса берём единичный шар этого пространства, $B(C^\infty)$.

Что здесь можно ожидать? Общая формула погрешности $n^{-r/d}$ при $r = \infty$ даёт, что при достаточно большом n погрешность не превосходит n^{-C} , для любого фиксированного C . Проблема в том, что “ждать” придётся в любом случае экспоненциально долго.

Теорема 1. При $n < 2^d$ имеем $\text{err}_n^{\text{app}}(B(C^\infty[-1, 1]^d)) = 1$.

Мы докажем теорему в более сильном виде. Пусть разрешается использовать произвольные непрерывные линейные функционалы, минимизируется погрешность вида

$$\sup_{f \in F} \|f - \varphi(\xi_1(f), \dots, \xi_n(f))\|_\infty.$$

Доказательство. Предположим, мы нашли такое линейное пространство $V_{n+1} \subset C^\infty$ размерности $n+1$, на котром $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_{C^\infty}$. Тогда мы установим, что $\text{err}_n \geq 1$. Действительно, для любых функционалов $\xi_1, \dots, \xi_n$, по соображениям размерности, найдётся ненулевой элемент $f^* \in V_{n+1}$, для которого $\xi_1(f^*) = \dots = \xi_n(f^*) = 0$. Пусть $g := \varphi(0, 0, \dots, 0)$. Тогда $\|f^* - g\|_\infty + \|f^* + g\|_\infty \geq 2\|f^*\|_\infty$ и одна из двух погрешностей будет большая.

Остаётся построить V . Начнём с $d = 1$. Для функции $g(x) = ax + b$ легко видеть, что

$$\|g\|_{C^\infty[-1, 1]} = |a| + |b| = \|g\|_{L_\infty[-1, 1]}.$$

Пусть $d > 1$. Рассмотрим

$$g(x) = \sum_{i \in \{0, 1\}^d} a_i x^i, \quad x^i := x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d},$$

т.е. полилинейные функции. По индукции легко проверить, что $\|g\|_\infty = \|g\|_{C^\infty}$. Что и требовалось. $\square$

Замечание. Аналогичный результат справедлив для куба $[0, 1]^d$ и $n < 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$. Используется следующий трюк. Пусть $d = 2s$. Берутся функции вида

$$g(x) = \sum_{i \in \{0, 1\}^s} a_i (x_1 + x_2)^{i_1} (x_3 + x_4)^{i_2} \cdots (x_{2s-1} + x_{2s})^{i_s}.$$

Замечание. В 2026 году доказали, что даже в задаче интегрирования на том же классе возникает проклятие размерности.

2 Разрешимые (tracktable) задачи

Отсутствие проклятия размерности — разрешимость (trackability). В идеале, количество точек n должно зависеть полиномиально от размерности d и $(1/\varepsilon)$, где ε — желаемая точность. Рассмотрим примеры таких задач.

Глобальное ограничение. Если добавить к Lip требование

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| \leq 1,$$

то проблема L_p -аппроксимации (и, следовательно, интегрирования), становится разрешимой. Например, при $p = 2$ получается следующая оценка на количество точек (см. [1]): $n \leq C d^2 \log^2 d (1/\varepsilon)^2 \log^4(1/\varepsilon)$. Условие на коэффициенты Фурье “связывает” все переменные таким образом, что проклятие размерности исчезает.

Маломерная структура. В статистике хорошо известно разложение ANOVA: функция f раскладывается в сумму $f = \sum_{S \subseteq [d]} f_S$, где функции f_S ортогональны и зависят от соответствующих переменных $x_i, i \in S$. Разложение легко построить:

$$f_{\emptyset} := \int_{[0,1]^d} f(x) dx,$$

далее для $i = 1, \dots, d$ для определения $f_{\{i\}}$ берём разность $f - f_{\emptyset}$ и интегрируем по всем переменным, кроме x_i . И так далее.

Пусть функция обладает маломерной структурой, т.е. в разложении встречаются только f_S с небольшим $|S|$:

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_m} f_{i_1, \dots, i_m}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}).$$

При достаточно малом m возможна эффективная (требующая полиномиального количества точек) аппроксимация f .

Тензорная структура. Функция раскладывается в произведение одномерных:

$$f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d). \quad (1)$$

Рассмотрим следующий класс функций вида (1) на кубе $[-1, 1]^d$:

$$F := \{f : \|f_i^{(r)}\|_{\infty} \leq M, \|f_i\|_{\infty} \leq 1\}.$$

Оказывается, мажоранта M влияет на tractability. См. [2].

Утверждение 2. Если $M \geq 2^r r!$, то $\text{err}_n^{\text{app}}(F) = 1$ при $n < 2^d$.

Доказательство. Нетрудно построить функцию $f \in W_{\infty}^r[0, 1]$, такую что $\|g\|_{\infty} = 1$ и $\|g^{(r)}\|_{\infty} = 2^r r!$, $\text{supp } g \subset [0, 1/2]$. Достаточно взять $g(x) = (1 - 2x)^r$, $0 \leq x \leq 1/2$.

Если $n < 2^d$, найдётся ортант без точек. Тогда fooling function можно построить, взяв тензорное произведение g -шек. $\square$

Утверждение 3. Если $M \geq 2^r r!$, то есть алгоритм для ε -аппроксимации на $n \leq C d^2 (1/\varepsilon)^{1/r} \log(1/\varepsilon)$ точек.

Приведём схему доказательства. Основной шаг: найти точку x^* такую что $f(x^*) \neq 0$. Если это сделано, то мы сможем аппроксимировать одномерные компоненты f_i следующим образом. Пусть, скажем, $d = 2$ и $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Для точки вида (x_1^*, x') имеем

$$\frac{f(x_1^*, x')}{f(x_1^*, x_2^*)} = \frac{f_2(x')}{f_2(x_2^*)}.$$

Поэтому, измеряя f для сетки $(x_1^*, x^{(k)})$, $k = 1, \dots, m$, мы получим m значений для $f_2/f_2(x_2^*)$ и приблизим эту функцию функцией $\hat{f}_2$. Тогда

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*) \cdot \frac{f_1(x_1)}{f_1(x_1^*)} \frac{f_2(x_2)}{f_2(x_2^*)} \approx f(x_1^*, x_2^*) \hat{f}_1(x_1) \hat{f}_2(x_2).$$

Осталось найти хотя бы одно ненулевое значение. Строится “детектор” — набор точек $P \subset [-1, 1]^d$, такой что $f(x) \neq 0$ для хотя бы одной точки $x \in P$. Используется вспомогательная лемма: если $g \in W_\infty^r[0, 1]$, $\|g\|_\infty \leq 1$, $\|g^{(r)}\|_\infty < r!$, то найдётся интервал длины $L := \|g\|_\infty^{1/r}$, на котором не более $r - 1$ нулей g . Применяем лемму ко всем $g = f_i$ и получаем box (стандартный параллелепипед) достаточно большого объёма, в котором мало нулей. Если взять в нём достаточно много точек на “диагонали”, то в одной из них нуля не будет.

Поскольку мы не знаем box, нужно чтобы детектор “залез” в любой box достаточно большого объёма. Это задача о “дисперсии”, известны оценки на кол-во точек P с таким свойством.

Список литературы

- [1] D. Krieg, “Optimal Monte Carlo methods for ℓ_2 -approximation”, *Constr. Approx.* (2019).
- [2] D. Krieg, D. Rudolf, “Recovery algorithms for high-dimensional rank one tensors”, JAT 2019.