

Спецкурс “Многомерная аппроксимация и анализ булевых функций”. Лекция 3: Анализ Фурье для булевых функций

18 октября 2026 г.

Мы рассматриваем функции $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Иногда, если это удобнее, $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Соответствие между ними задаётся так: $0 \mapsto 1$ (нейтральный элемент по сложению / умножению), $1 \mapsto -1$.

Введём ряд обозначений. Среднее значение:

$$\mathbb{E}f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1, 1\}^n} f(x),$$

т.е. x здесь считается случайным и равномерно распределённым в кубе $\{-1, 1\}^n$.

Скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \mathbb{E}f(x)g(x) = \frac{1}{2^n} \sum_x f(x)g(x),$$

L_p -нормы

$$\|f\|_{L_p} = \left(2^{-n} \sum_x |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Упражнение 1. Выписать неравенства между $\|f\|_{L_p}$ и $\|f\|_{L_q}$ при разных p, q .

Пусть $S \subset [n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Положим

$$\chi_S(x) := \prod_{i \in S} x_i.$$

Для пустого множества $\chi_\emptyset \equiv 1$. Эти функции называются “характерами” (подробнее об этом чуть дальше).

Утверждение 1 (Ортогональность характеров). *Для любых $S, T \subset [n]$*

$$\langle \chi_S, \chi_T \rangle = \begin{cases} 1, & S = T, \\ 0, & S \neq T. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем $\mathbb{E}\chi_S\chi_T = \mathbb{E}\chi_{S\Delta T}$. Возьмём произвольный $i_0 \in S\Delta T$ и воспользуемся независимостью переменных x_i :

$$\mathbb{E}\chi_{S\Delta T} = \mathbb{E}x_{i_0} \mathbb{E} \prod_{i \in S\Delta T, i \neq i_0} x_i = 0.$$

□

Пространство функций $\{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет размерность 2^n . Таким образом, система характеров $\{\chi_S: S \subset [n]\}$ является ортонормированным базисом в этом пространстве.

Коэффициенты Фурье $\hat{f}(S) := \langle f, \chi_S \rangle$. Ясно, что

$$f = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S) \chi_S,$$

и $\|f\|_{L_2}^2 = \sum_S \hat{f}(S)^2 = \|\hat{f}\|_{\ell_2}^2$ — равенство Парсеваля.

Отметим также простые равенства $\mathbb{E}f = \hat{f}(\emptyset)$ и

$$\text{Var } f = \mathbb{E}(f - \mathbb{E}f)^2 = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}(S)^2.$$

Характеры на группе. Напомним, что для конечной абелевой группы G характером называется гомоморфизм $f: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ (т.е. $f(x) \neq 0$ и $f(x \oplus y) = f(x)f(y)$, где $\oplus$ это сложение в G). Характеры сами образуют группу (относительно поточечного умножения функций), в общем случае она обозначается $\hat{G}$. Для конечных групп сопряженная группа $\hat{G}$ изоморфна исходной.

Наши χ_S являются характерами, если считать $\{-1, 1\}^n$ группой с покоординатным умножением.

В случае $\{0, 1\}^n$ это группа с покоординатным сложением по модулю 2 и характеры можно задать так. Вместо подмножества S берём бинарный вектор $y \in \{0, 1\}^n$ и определяем характер $\chi_y: x \mapsto (-1)^{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}$. Здесь наглядно видно, что характеры для группы $\mathbb{Z}_2^n$ образуют сопряжённую группу так же $\mathbb{Z}_2^n$.

Упражнение 2. Для $f: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ считаем, что $\hat{f}(y)$ это функция на том же булевом кубе. Чему равно $\hat{\hat{f}}$?

Отметим, что функцию $\chi_y: x \mapsto (-1)^{\sum_{i=1}^n x_i y_i}$ можно определить для $x \in [0, 1]$, если считать, что $x_1, \dots, x_n$ это двоичные цифры x . Если рассмотреть функции $\{\chi_y\}$ для бинарных векторов произвольной длины, мы получим так называемую *систему Уолша*. Это полная ортонормированная система в $L_2[0, 1]$.

Нам, однако, удобнее не отождествлять аргументы f и $\hat{f}$, поэтому будем работать с подмножествами S и характерами χ_S .

Производные и влияние переменных Ещё обозначения. Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$ полагаем

$$\begin{aligned} x^{\oplus i} &= (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ x^{(i \rightarrow 1)} &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ x^{(i \rightarrow -1)} &= (x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Производная по i -й координате:

$$D_i f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x^{(i \rightarrow 1)}) - f(x^{(i \rightarrow -1)}) \right).$$

D_i является линейным оператором в пространстве булевых функций. Отметим, что $D_i f$ не зависит от x_i . Следовательно (почему?), $\widehat{D_i f}(S) = 0$ при $i \in S$.

Влияние i -й координаты $\text{Inf}_i f := \|D_i f\|_{L_2}^2$.

Упражнение 3. Как выражается влияние координаты для функций $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$?

Суммарное влияние $I(f) := \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i f$.

Утверждение 2 (Неравенство Пуанкаре). Для любой функции $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\text{Var } f \leq I(f) = \mathbb{E}((D_1 f)^2 + \dots + (D_n f)^2).$$

Напомним классическое неравенство Пуанкаре. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область. Тогда для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Видим, что утверждение выше это дискретный аналог неравенства.

Доказательство. Как мы уже говорили, $\text{Var } f = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}(S)^2$; выпишем теперь правую часть в терминах коэффициентов Фурье. Для произвольного характера χ_S имеем $D_i \chi_S = 0$, если $i \notin S$, и $D_i \chi_S = \chi_{S \setminus \{i\}}$, если $i \in S$. В силу линейности D_i , для любой функции f

$$D_i f = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S) \chi_{S \setminus \{i\}},$$

откуда $\|D_i f\|_{L_2}^2 = \sum_{S \ni i} \hat{f}(S)^2$. Суммируя по $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\sum \|D_i f\|_{L_2}^2 = \sum_S |S| \hat{f}(S)^2.$$

Ясно, что эта величина не меньше $\text{Var } f$. □

Степень. Вернёмся к разложению Фурье:

$$f(x) = \sum_S \hat{f}(S) \chi_S(x) = \sum_S \hat{f}(S) \prod_{i \in S} x_i.$$

То есть, это представление функции в виде многочлена, в котором каждый моном полилинеен. Такое представление единственно (так как характеры образуют базис).

Степенью функции называется величина $\deg f := \max\{|S| : \hat{f}(S) \neq 0\}$.

Это в точности степень представляющего f многочлена. Степень является важной мерой сложности булевых функций, о ней ещё будем много говорить.

Тест на линейность. Назовём функцию $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ ± 1 -линейной, если $f(x \circ y) \equiv f(x)f(y)$, где $\circ$ — покоординатное умножение.

Упражнение 4. Проверьте, что свойству линейности удовлетворяют характеры χ_S , тождественный ноль и только эти функции.

Для ± 1 -значных функций введём расстояние

$$\text{dist}(f, g) = \mathbb{P}(f(x) \neq g(x)) = \frac{1}{2} \|f - g\|_{L_1}.$$

Как проверить, что функция ± 1 -линейна? Проведём “тест”: возьмём случайно $x, y \in \{-1, 1\}^n$ и проверим равенство $f(x \circ y) = f(x)f(y)$.

Теорема 1 (Blum, Luby, Rubinfeld). Если $f: \{-1, 1\}$ такова, что тест на линейность проходит с вероятностью $\geq 1 - \delta$, то существует S такое что $\text{dist}(f, \chi_S) \leq \delta$.

Доказательство. Докажем, что найдётся S такой, что $\hat{f}(S) \geq 1 - 2\delta$. Имеем

$$\begin{aligned}
1 - 2\delta &= (1 - \delta) - \delta \leq \mathbb{E}f(x \circ y)f(x)f(y) = \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_S \hat{f}(S)\chi_S(x \circ y) \right) \left(\sum_T \hat{f}(T)\chi_T(x) \right) \left(\sum_R \hat{f}(R)\chi_R(y) \right) \right] = \\
&= \sum_{S,T,R} \hat{f}(S)\hat{f}(T)\hat{f}(R)\mathbb{E}\chi_S(x)\chi_S(y)\chi_T(x)\chi_R(y) = \\
&= \sum \hat{f}(S)^3 \leq \|\hat{f}\|_\infty \|\hat{f}\|_{\ell_2}^2 = \|\hat{f}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, для некоторого S имеем $1 - 2\delta \leq \hat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle = 1 - 2\text{dist}(f, \chi_S)$. $\square$

Сравнение L_2 и L_4 -норм.

Лемма 1 (Bonami). Пусть $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\deg f \leq k$. Тогда $\|f\|_{L_4} \leq 3^{k/2}\|f\|_{L_2}$.

Доказательство. Доказательство индукцией по n . Запишем $x = (\bar{x}, x_n)$, $f(x) = x_n g(\bar{x}) + h(\bar{x})$, причём $\deg g \leq k - 1$, $\deg h \leq k$. Сначала запишем L_2 -норму:

$$\mathbb{E}f^2 = \mathbb{E}[x_n g(\bar{x}) + h(\bar{x})]^2 = \mathbb{E}x_n^2 g(\bar{x})^2 + 2\mathbb{E}x_n g(\bar{x})h(\bar{x}) = \mathbb{E}h(\bar{x})^2 = \mathbb{E}g^2 + \mathbb{E}h^2,$$

поскольку $x_n^2 \equiv 1$ и $\mathbb{E}x_n = 0$. Аналогично для 4-й степени:

$$\mathbb{E}f^4 = \mathbb{E}g^4 + 6\mathbb{E}g^2 h^2 + \mathbb{E}h^4 \leq \mathbb{E}g^4 + 6\sqrt{\mathbb{E}g^4}\sqrt{\mathbb{E}h^4} + \mathbb{E}g^4.$$

Применяя предположение индукции (g и h зависят от меньшего числа переменных):

$$\mathbb{E}f^4 \leq 3^{2(k-1)}(\mathbb{E}g^2)^2 + 6 \cdot 3^k \cdot 3^{k-1}(\mathbb{E}g^2)(\mathbb{E}h^2) + 3^{2k}(\mathbb{E}h^2)^2 \leq 3^{2k}(\mathbb{E}g^2 + \mathbb{E}h^2)^2,$$

что и требовалось. $\square$

Упражнение 5. Пусть известно, что $\|f\|_{L_q} \leq C\|f\|_{L_r}$ для некоторых $q > r$ и константы C . Докажите, что все $\|f\|_{L_p}$ -нормы при $p \leq q$ эквивалентны с точностью до некоторой константы. Получите точную оценку в терминах C, p, q .