Спецкурс 2020/2021: “Геометрические и комбинаторные свойства матриц и аппроксимация” Блок лекций “Сложность матриц и аппроксимация” Лекция 8: “Сложность булевых функций, матриц и графов”

5 декабря 2020 г.

Функции, матрицы и графы

Напомним обозначение $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Функция $f\colon [M] \times [N] \to \{0, 1\}$.

Функции, матрицы и графы

Напомним обозначение $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Функция $f\colon [M] \times [N] \to \{0, 1\}$.
- Матрица $M_f \in \{0, 1\}^{M \times N}$, где $M_f(x, y) = f(x, y)$.

Функции, матрицы и графы

Напомним обозначение $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

- Функция $f\colon [M] \times [N] \to \{0, 1\}$.
- Матрица $M_f \in \{0, 1\}^{M \times N}$, где $M_f(x, y) = f(x, y)$.

Нижние оценки $\operatorname{rank} M_f$, $\operatorname{rank}_{\pm} M_f$, $\operatorname{rank}_{\varepsilon} M_f$ дают оценки снизу для различных вариантов коммуникационной сложности f. Используются методы линейной алгебры: нормы (Шаттена, операторные, γ_2), SVD, умножение Шура и Кронекера.

Функции, матрицы и графы

Напомним обозначение $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Функция $f\colon [M] \times [N] \to \{0, 1\}$.
- Матрица $M_f \in \{0, 1\}^{M \times N}$, где $M_f(x, y) = f(x, y)$.

Нижние оценки $\operatorname{rank} M_f$, $\operatorname{rank}_{\pm} M_f$, $\operatorname{rank}_{\varepsilon} M_f$ дают оценки снизу для различных вариантов коммуникационной сложности f. Используются методы линейной алгебры: нормы (Шаттена, операторные, γ_2), SVD, умножение Шура и Кронекера.

- Двудольный граф G_f с долями $X = [M]$, $Y = [N]$ и ребрами $x \to y$ для $f(x, y) = 1$.

Функции, матрицы и графы

Напомним обозначение $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Функция $f\colon [M] \times [N] \to \{0, 1\}$.
- Матрица $M_f \in \{0, 1\}^{M \times N}$, где $M_f(x, y) = f(x, y)$.

Нижние оценки $\operatorname{rank} M_f$, $\operatorname{rank}_\pm M_f$, $\operatorname{rank}_\varepsilon M_f$ дают оценки снизу для различных вариантов коммуникационной сложности f. Используются методы линейной алгебры: нормы (Шаттена, операторные, γ_2), SVD, умножение Шура и Кронекера.

- Двудольный граф G_f с долями $X = [M]$, $Y = [N]$ и ребрами $x \to y$ для $f(x, y) = 1$.

Применим методы теории графов для получения оценок сложности G_f и ассоциированных с ним объектов f, M_f.

Матрица инцидентности

Вначале поговорим о связи между графами и матрицами. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф. Пронумеруем вершины: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Матрица инцидентности

Вначале поговорим о связи между графами и матрицами. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф. Пронумеруем вершины: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Матрицей инцидентности графа G называется матрица $A = A(G)$ размера $n \times n$, такая что $A_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда в графе есть ребро $v_i - v_j$.

Матрица инцидентности

Вначале поговорим о связи между графами и матрицами. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф. Пронумеруем вершины: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Матрицей инцидентности графа G называется матрица $A = A(G)$ размера $n \times n$, такая что $A_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда в графе есть ребро $v_i - v_j$.

Рассмотрим свойства матрицы инцидентности. Во-первых, $A(G)$ по определению симметрична и обладает вещественным спектром $\{\lambda_i(A)\}$. Отметим, что спектр не зависит от способа нумерации вершин; можно говорить о спектре графа: $\lambda_i(G)$.

Матрица инцидентности

Вначале поговорим о связи между графами и матрицами. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф. Пронумеруем вершины: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Матрицей инцидентности графа G называется матрица $A = A(G)$ размера $n \times n$, такая что $A_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда в графе есть ребро $v_i - v_j$.

Рассмотрим свойства матрицы инцидентности. Во-первых, $A(G)$ по определению симметрична и обладает вещественным спектром $\{\lambda_i(A)\}$. Отметим, что спектр не зависит от способа нумерации вершин; можно говорить о спектре графа: $\lambda_i(G)$.

Напомним, что степенью вершины в графе называется количество рёбер, которые из неё выходят: $\deg(v) = |\{e \in E \colon v \in e\}|$.

Свойства матрицы инцидентности

Утверждение

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф из n вершин, A — его матрица инцидентности. Выполнены свойства:

Свойства матрицы инцидентности

Утверждение

Пусть $G = (V, E)$ *— неориентированный граф из* n *вершин,* A *— его матрица инцидентности. Выполнены свойства:*

- $|\lambda_i(G)| \leqslant \max \deg(v)$;

Свойства матрицы инцидентности

Утверждение

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф из n вершин, A — его матрица инцидентности. Выполнены свойства:

- $|\lambda_i(G)| \leqslant \max \deg(v)$;
- *если G — двудольный граф и λ — собственное значение G, то $(-\lambda)$ тоже собственное значение, той же кратности;*

Свойства матрицы инцидентности

Утверждение

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф из n вершин, A — его матрица инцидентности. Выполнены свойства:

- $|\lambda_i(G)| \leqslant \max \deg(v)$;
- *если G — двудольный граф и λ — собственное значение G, то $(-\lambda)$ тоже собственное значение, той же кратности;*
- $\min \deg(v) \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max \deg(v)$;

Свойства матрицы инцидентности

Утверждение

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф из n вершин, A — его матрица инцидентности. Выполнены свойства:

- $|\lambda_i(G)| \leqslant \max \deg(v)$;
- *если G — двудольный граф и λ — собственное значение G, то $(-\lambda)$ тоже собственное значение, той же кратности;*
- $\min \deg(v) \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max \deg(v)$;
- *для индуцированного подграфа H имеем*

$$\lambda_{\min}(G) \leqslant \lambda_{\min}(H) \leqslant \lambda_{\max}(H) \leqslant \lambda_{\max}(G).$$

Доказательство свойств

Докажем, что $|\lambda| \leqslant \max \deg(v)$ для всех собственных значений. Пусть x — собственный вектор с этим собственным значением. Считаем, что координата $|x_p|$ максимальна по модулю.

Доказательство свойств

Докажем, что $|\lambda| \leqslant \max \deg(v)$ для всех собственных значений. Пусть x — собственный вектор с этим собственным значением. Считаем, что координата $|x_p|$ максимальна по модулю.

$$|(Ax)_p| = |\lambda| \cdot |x_p|,$$

$$|(Ax)_p| = |\sum_j A_{p,j} x_j| \leqslant \sum_j A_{p,j} |x_j| \leqslant \deg(v_p)|x_p| \leqslant \max \deg(v) \cdot |x_p|.$$

Доказательство свойств

Докажем, что $|\lambda| \leqslant \max \deg(v)$ для всех собственных значений. Пусть x — собственный вектор с этим собственным значением. Считаем, что координата $|x_p|$ максимальна по модулю.

$$|(Ax)_p| = |\lambda| \cdot |x_p|,$$

$$|(Ax)_p| = |\sum_j A_{p,j} x_j| \leqslant \sum_j A_{p,j} |x_j| \leqslant \deg(v_p)|x_p| \leqslant \max \deg(v) \cdot |x_p|.$$

Докажем теперь симметричность спектра двудольного графа с долями V_1 и V_2. Пусть $b_i = 1$ для $v_i \in V_1$ и $b_i = -1$ для $v_i \in V_1$. Рассмотрим изоморфизм $x \mapsto bx$. Пусть $Ax = \lambda x$, вычислим $A(bx)$.

Доказательство свойств

Докажем, что $|\lambda| \leqslant \max \deg(v)$ для всех собственных значений. Пусть x — собственный вектор с этим собственным значением. Считаем, что координата $|x_p|$ максимальна по модулю.

$$|(Ax)_p| = |\lambda| \cdot |x_p|,$$

$$|(Ax)_p| = |\sum_j A_{p,j} x_j| \leqslant \sum_j A_{p,j} |x_j| \leqslant \deg(v_p)|x_p| \leqslant \max \deg(v) \cdot |x_p|.$$

Докажем теперь симметричность спектра двудольного графа с долями V_1 и V_2. Пусть $b_i = 1$ для $v_i \in V_1$ и $b_i = -1$ для $v_i \in V_1$. Рассмотрим изоморфизм $x \mapsto bx$. Пусть $Ax = \lambda x$, вычислим $A(bx)$.

Для $i \colon v_i \in V_1$ имеем

$$(A(bx))_i = \sum A_{i,j} b_j x_j = \sum_{v_j \in V_1} A_{i,j} x_j - \sum_{v_j \in V_2} A_{i,j} x_j = - \sum_{v_j \in V_2} A_{i,j} x_j =$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = -\lambda x_i = -\lambda (bx)_i.$$

Доказательство свойств

Докажем, что $\min\deg(v) \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max\deg(v)$. Оценка сверху уже была доказана. Для оценки снизу заметим, что $\langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_{\max}$ для любого единичного x. Подставим $x = n^{-1/2}(1, 1, \ldots, 1)$:

Доказательство свойств

Докажем, что $\min \deg(v) \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max \deg(v)$. Оценка сверху уже была доказана. Для оценки снизу заметим, что $\langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_{\max}$ для любого единичного x. Подставим $x = n^{-1/2}(1, 1, \ldots, 1)$:

$$\frac{1}{n}\langle A\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} A_{k,l} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \deg(v_k) \geqslant \min \deg(v).$$

Доказательство свойств

Докажем, что $\min\deg(v) \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max\deg(v)$. Оценка сверху уже была доказана. Для оценки снизу заметим, что $\langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_{\max}$ для любого единичного x. Подставим $x = n^{-1/2}(1, 1, \dots, 1)$:

$$\frac{1}{n}\langle A\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} A_{k,l} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\deg(v_k) \geqslant \min\deg(v).$$

Для доказательства $\lambda_{\max}(H) \leqslant \lambda_{\max}(G)$ нужно взять вектор, максимизирующий $\langle A_H x, x\rangle$.

Хроматическое число

Из доказанных свойств вытекает следствие.

Утверждение

Хроматическое число графа G оценивается величиной $\chi(G) \leqslant \lambda_{\mathsf{max}}(G) + 1$.

Хроматическое число

Из доказанных свойств вытекает следствие.

Утверждение

Хроматическое число графа G оценивается величиной $\chi(G) \leqslant \lambda_{\max}(G) + 1$.

Действительно, для любого индуцированного подграфа H имеем $\min_{v \in V_H} \deg(v) \leqslant \lambda_{\max}(H) \leqslant \lambda_{\max}(G)$. Докажем, что если всегда $\min \deg \leqslant K$, то граф можно покрасить в $K + 1$ цвет.

Хроматическое число

Из доказанных свойств вытекает следствие.

Утверждение

Хроматическое число графа G оценивается величиной $\chi(G) \leqslant \lambda_{\max}(G) + 1$.

Действительно, для любого индуцированного подграфа H имеем $\min_{v \in V_H} \deg(v) \leqslant \lambda_{\max}(H) \leqslant \lambda_{\max}(G)$. Докажем, что если всегда $\min \deg \leqslant K$, то граф можно покрасить в $K+1$ цвет.

Пусть x_n — вершина G степени не выше K. Положим $H_{n-1} = G - \{x_n\}$ и возьмём в нём вершину x_{n-1}, и т.д. В последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждый x_j соединяется не более чем с K вершинами перед ним. Значит, можно красить их жадным образом.

Сложность формул

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева функция от n переменных. Схемой, реализующей функцию f, называется ацикличный ориентированный граф с n входными узлами (соответствующими переменным x_i), вычислительными узлами ($y_i \& y_j$, $y_i \vee y_j$, $\neg y_i$) и выходом, в котором должно вычисляться значение f.

Сложность формул

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева функция от n переменных. Схемой, реализующей функцию f, называется ацикличный ориентированный граф с n входными узлами (соответствующими переменным x_i), вычислительными узлами $(y_i \& y_j,\ y_i \vee y_j,\ \neg y_i)$ и выходом, в котором должно вычисляться значение f.

Схема называется *формулой*, если промежуточные узлы нельзя переиспользовать — из каждого идёт только одно выходное ребро.

Сложность формул

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева функция от n переменных. Схемой, реализующей функцию f, называется ацикличный ориентированный граф с n входными узлами (соответствующими переменным x_i), вычислительными узлами ($y_i \& y_j$, $y_i \vee y_j$, $\neg y_i$) и выходом, в котором должно вычисляться значение f.

Схема называется *формулой*, если промежуточные узлы нельзя переиспользовать — из каждого идёт только одно выходное ребро.

Сложностью $L(f)$ реализации f в виде формулы назовём минимальный размер формулы, вычисляющей f.

Сложность двудольных графов

Рассматриваем двудольные графы с фиксированными долями X и Y. Граф отождествим со множеством его рёбер: $G \subset X \times Y$.

Сложность двудольных графов

Рассматриваем двудольные графы с фиксированными долями X и Y. Граф отождествим со множеством его рёбер: $G \subset X \times Y$.

При определении сложности графа нужно задать “начальные” элементы, из которых он собирается, и элементарные операции (которые происходят в вычислительных узлах).

Сложность двудольных графов

Рассматриваем двудольные графы с фиксированными долями X и Y. Граф отождествим со множеством его рёбер: $G \subset X \times Y$.

При определении сложности графа нужно задать "начальные" элементы, из которых он собирается, и элементарные операции (которые происходят в вычислительных узлах).

- операции: объединение и пересечение множества рёбер, т.е. для G_1 и G_2 можно вычислить $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \cup G_2$;
- начальные элементы: графы вида $A \times Y$ и $X \times B$, множество таких графов обозначим $\mathcal{B}$;

Сложность двудольных графов

Рассматриваем двудольные графы с фиксированными долями X и Y. Граф отождествим со множеством его рёбер: $G \subset X \times Y$.

При определении сложности графа нужно задать "начальные" элементы, из которых он собирается, и элементарные операции (которые происходят в вычислительных узлах).

- операции: объединение и пересечение множества рёбер, т.е. для G_1 и G_2 можно вычислить $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \cup G_2$;
- начальные элементы: графы вида $A \times Y$ и $X \times B$, множество таких графов обозначим $\mathcal{B}$;

Аналогично булевым функциям, определяются схемы и формулы, вычисляющие данный граф. Будем обозначать $L_{\mathcal{B}}(G)$ сложность реализации графа в виде формулы с начальными элементами из $\mathcal{B}$.

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$?

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$? Графы $G_{f_1} \cap G_{f_2}$ и $G_{f_1} \cup G_{f_2}$, соответственно.

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$? Графы $G_{f_1} \cap G_{f_2}$ и $G_{f_1} \cup G_{f_2}$, соответственно.
- Какой граф у функции $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_i$? А у функции y_j?

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$? Графы $G_{f_1} \cap G_{f_2}$ и $G_{f_1} \cup G_{f_2}$, соответственно.
- Какой граф у функции $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_i$? А у функции y_j? В первом случае это полный двудольный подграф вида $K_{N/2,N}$, $N = 2^N$.

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$? Графы $G_{f_1} \cap G_{f_2}$ и $G_{f_1} \cup G_{f_2}$, соответственно.
- Какой граф у функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_i$? А у функции y_j? В первом случае это полный двудольный подграф вида $K_{N/2,N}$, $N = 2^N$.
- Как соотносятся сложности функции $L(f)$ и графа $L_{\mathcal{B}}(G_f)$?

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$? Графы $G_{f_1} \cap G_{f_2}$ и $G_{f_1} \cup G_{f_2}$, соответственно.
- Какой граф у функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_i$? А у функции y_j? В первом случае это полный двудольный подграф вида $K_{N/2,N}$, $N = 2^N$.
- Как соотносятся сложности функции $L(f)$ и графа $L_{\mathcal{B}}(G_f)$?

$$L_{\mathcal{B}}(G_f) \leqslant L(f).$$

Что делать с отрицаниями?

Связь между сложностью функции и графа

Пусть f — булева функция от $2n$ переменных. Запишем её в виде $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и рассмотрим соответствующий граф G_f.

Сравните функции и графы:

- Какие графы соответствуют функциям $f_1 \& f_2$, $f_1 \vee f_2$? Графы $G_{f_1} \cap G_{f_2}$ и $G_{f_1} \cup G_{f_2}$, соответственно.
- Какой граф у функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_i$? А у функции y_j? В первом случае это полный двудольный подграф вида $K_{N/2,N}$, $N = 2^N$.
- Как соотносятся сложности функции $L(f)$ и графа $L_{\mathcal{B}}(G_f)$?

$$L_{\mathcal{B}}(G_f) \leqslant L(f).$$

  Что делать с отрицаниями? Поскольку это формула, то можно их загнать в переменные.

Итак, сложность двудольного графа даёт нижнюю оценку обычной сложности булевых функций.

Пример: функция чётности

Рассмотрим

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y_1 \oplus \cdots \oplus y_n.$$

Известно, что эту функцию нельзя вычислить схемой константной глубины, используя полиномиальное число узлов вида & и $\vee$ (даже с произвольным кол-вом входов). Используя обычный базис, можно сделать формулу глубины $\asymp \log n$.

Пример: функция чётности

Рассмотрим

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus y_1 \oplus \dots \oplus y_n.$$

Известно, что эту функцию нельзя вычислить схемой константной глубины, используя полиномиальное число узлов вида & и $\vee$ (даже с произвольным кол-вом входов). Используя обычный базис, можно сделать формулу глубины $\asymp \log n$.

Какой вид имеет граф G_f? Оцените его сложность.

Пример: функция чётности

Рассмотрим

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y_1 \oplus \cdots \oplus y_n.$$

Известно, что эту функцию нельзя вычислить схемой константной глубины, используя полиномиальное число узлов вида & и $\vee$ (даже с произвольным кол-вом входов). Используя обычный базис, можно сделать формулу глубины $\asymp \log n$.

Какой вид имеет граф G_f? Оцените его сложность.
$G_f = (A \times \overline{A}) \cup (\overline{A} \times A)$, где A это множество векторов $\{0,1\}^n$ с чётным числом единиц.

Пример: матрица Адамара

Пусть H_n — матрица Уолша–Адамара размера $N \times N$, $N = 2^n$. Пусть G — соответствующий граф (проводим ребро $x - y$, если $H_n(x, y) = 1$).

Пример: матрица Адамара

Пусть H_n — матрица Уолша–Адамара размера $N \times N$, $N = 2^n$. Пусть G — соответствующий граф (проводим ребро $x - y$, если $H_n(x, y) = 1$).

Матрица Адамара сложные с точки зрения коммуникационной сложности (Forster: $\mathrm{rank}_{\pm} H \geqslant \sqrt{N}$). Что можно сказать про граф?

Пример: матрица Адамара

Пусть H_n — матрица Уолша–Адамара размера $N \times N$, $N = 2^n$. Пусть G — соответствующий граф (проводим ребро $x - y$, если $H_n(x, y) = 1$).

Матрица Адамара сложные с точки зрения коммуникационной сложности (Forster: $\operatorname{rank}_{\pm} H \geqslant \sqrt{N}$). Что можно сказать про граф?

Соответствующая булевая функция имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 \oplus x_2 y_2 \oplus \cdots \oplus x_n y_n.$$

Она вычисляется формулой с $O(n)$ элементами глубины $O(\log n)$.

Пример: матрица Адамара

Пусть H_n — матрица Уолша–Адамара размера $N \times N$, $N = 2^n$. Пусть G — соответствующий граф (проводим ребро $x - y$, если $H_n(x, y) = 1$).

Матрица Адамара сложные с точки зрения коммуникационной сложности (Forster: $\mathrm{rank}_{\pm} H \geqslant \sqrt{N}$). Что можно сказать про граф?

Соответствующая булевая функция имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 \oplus x_2 y_2 \oplus \dots \oplus x_n y_n.$$

Она вычисляется формулой с $O(n)$ элементами глубины $O(\log n)$.

Упражнение: придумайте схему константной глубины для вычисления графа.

Проективная и аффинная размерности графа

Дадим различные оценки сложности графов. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф.

Проективная и аффинная размерности графа

Дадим различные оценки сложности графов. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф.

Говорят, что задана *проективная реализация* графа $G = (V, E)$ в линейном пространстве U над полем $\mathbb{F}$, если для каждой вершины $v \in V$ задано линейное пространство $U_v \subset U$, так что

$$(v, w) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad U_v \cap U_w \neq \{0\}.$$

Проективная и аффинная размерности графа

Дадим различные оценки сложности графов. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф.

Говорят, что задана *проективная реализация* графа $G = (V, E)$ в линейном пространстве U над полем $\mathbb{F}$, если для каждой вершины $v \in V$ задано линейное пространство $U_v \subset U$, так что

$$(v, w) \in E \iff U_v \cap U_w \neq \{0\}.$$

Проективной размерностью графа $\mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G)$ назовём минимальную размерность пространства U, в котором существует его проективная реализация.

Проективная и аффинная размерности графа

Дадим различные оценки сложности графов. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный неориентированный граф.

Говорят, что задана *проективная реализация* графа $G = (V, E)$ в линейном пространстве U над полем $\mathbb{F}$, если для каждой вершины $v \in V$ задано линейное пространство $U_v \subset U$, так что

$$(v, w) \in E \quad \Longleftrightarrow \quad U_v \cap U_w \neq \{0\}.$$

Проективной размерностью графа $\mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G)$ назовём минимальную размерность пространства U, в котором существует его проективная реализация.

Аналогично определяется *аффинная размерность*, только линейные пространства U_v заменяются на аффинные, а требование $U_v \cap U_w \neq \{0\}$ заменяется на $U_v \cap U_w \neq \varnothing$.

Связь между размерностями

Утверждение

- *Для произвольного поля имеем* $\operatorname{adim}_{\mathbb{F}}(G) \leqslant \operatorname{pdim}_{\mathbb{F}}(G)^2$.
- *Над полем* $\mathbb{R}$ *имеем* $\operatorname{adim}_{\mathbb{R}}(G) \leqslant \operatorname{pdim}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

Известные оценки в обратную сторону намного слабее.

Связь между размерностями

Утверждение

- *Для произвольного поля имеем* $\mathrm{adim}_{\mathbb{F}}(G) \leqslant \mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G)^2$.
- *Над полем* $\mathbb{R}$ *имеем* $\mathrm{adim}_{\mathbb{R}}(G) \leqslant \mathrm{pdim}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

Известные оценки в обратную сторону намного слабее.

Пусть $\{U_v\}$, $U_v \subset \mathbb{F}^d$ — проективная реализация. Построим аффинную реализацию в пространстве матриц $\mathbb{F}^{d\times d}$.

Связь между размерностями

Утверждение

- *Для произвольного поля имеем* $\operatorname{adim}_{\mathbb{F}}(G) \leqslant \operatorname{pdim}_{\mathbb{F}}(G)^2$.
- *Над полем* $\mathbb{R}$ *имеем* $\operatorname{adim}_{\mathbb{R}}(G) \leqslant \operatorname{pdim}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

Известные оценки в обратную сторону намного слабее.

Пусть $\{U_v\}$, $U_v \subset \mathbb{F}^d$ — проективная реализация. Построим аффинную реализацию в пространстве матриц $\mathbb{F}^{d\times d}$.

Полагаем

$$W_v := \{A \in \mathbb{F}^{d\times d} \colon \text{строки } A \text{ лежат в } U_v \text{ и } \operatorname{tr}(A) = 1\}.$$

Связь между размерностями

Утверждение

- *Для произвольного поля имеем* $\operatorname{adim}_{\mathbb{F}}(G) \leqslant \operatorname{pdim}_{\mathbb{F}}(G)^2$.
- *Над полем* $\mathbb{R}$ *имеем* $\operatorname{adim}_{\mathbb{R}}(G) \leqslant \operatorname{pdim}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

Известные оценки в обратную сторону намного слабее.

Пусть $\{U_v\}$, $U_v \subset \mathbb{F}^d$ — проективная реализация. Построим аффинную реализацию в пространстве матриц $\mathbb{F}^{d\times d}$.

Полагаем

$$W_v := \{A \in \mathbb{F}^{d\times d} \colon \text{строки } A \text{ лежат в } U_v \text{ и } \operatorname{tr}(A) = 1\}.$$

Если $x \in U_{v_1} \cap U_{v_2}$, то можно взять матрицу с одной строкой, пропорциональной x, и остальными нулевыми. Если $A \in W_{v_1} \cap W_{v_2}$, то в A найдётся ненулевая строка, она принадлежит U_{v_1} и U_{v_2}.

Связь между размерностями

Утверждение

- *Для произвольного поля имеем* $\mathrm{adim}_{\mathbb{F}}(G) \leqslant \mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G)^2$.
- *Над полем* $\mathbb{R}$ *имеем* $\mathrm{adim}_{\mathbb{R}}(G) \leqslant \mathrm{pdim}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

Известные оценки в обратную сторону намного слабее.

Пусть $\{U_v\}$, $U_v \subset \mathbb{F}^d$ — проективная реализация. Построим аффинную реализацию в пространстве матриц $\mathbb{F}^{d\times d}$.

Полагаем

$$W_v := \{A \in \mathbb{F}^{d\times d} \colon \text{строки } A \text{ лежат в } U_v \text{ и } \mathrm{tr}(A) = 1\}.$$

Если $x \in U_{v_1} \cap U_{v_2}$, то можно взять матрицу с одной строкой, пропорциональной x, и остальными нулевыми. Если $A \in W_{v_1} \cap W_{v_2}$, то в A найдётся ненулевая строка, она принадлежит U_{v_1} и U_{v_2}.

Как получить из проективной реализации аффинную?

Связь между размерностями

Утверждение

- *Для произвольного поля имеем* $\mathrm{adim}_{\mathbb{F}}(G) \leqslant \mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G)^2$.
- *Над полем* $\mathbb{R}$ *имеем* $\mathrm{adim}_{\mathbb{R}}(G) \leqslant \mathrm{pdim}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

Известные оценки в обратную сторону намного слабее.

Пусть $\{U_v\}$, $U_v \subset \mathbb{F}^d$ — проективная реализация. Построим аффинную реализацию в пространстве матриц $\mathbb{F}^{d\times d}$.

Полагаем

$$W_v := \{A \in \mathbb{F}^{d\times d} \colon \text{строки } A \text{ лежат в } U_v \text{ и } \mathrm{tr}(A) = 1\}.$$

Если $x \in U_{v_1} \cap U_{v_2}$, то можно взять матрицу с одной строкой, пропорциональной x, и остальными нулевыми. Если $A \in W_{v_1} \cap W_{v_2}$, то в A найдётся ненулевая строка, она принадлежит U_{v_1} и U_{v_2}.

Как получить из проективной реализации аффинную? Нужно пересечь всё с гиперплоскостью общего положения.

Theorem (Pudlák, Rödl, 1992)

Если булева функция f от $2n$ переменных вычислима программой с ветвлением размера S, то $\mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G_f) \leqslant S + 2$.

Theorem (Pudlák, Rödl, 1992)

Если булева функция f от $2n$ переменных вычислима программой с ветвлением размера S, то $\mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G_f) \leqslant S + 2$.

Прогаммы с ветвлением (рисуем картинку!) по силе между булевыми формулами и булевыми схемами.

Theorem (Pudlák, Rödl, 1992)

Если булева функция f от $2n$ переменных вычислима программой с ветвлением размера S, то $\mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G_f) \leqslant S + 2$.

Програмы с ветвлением (рисуем картинку!) по силе между булевыми формулами и булевыми схемами.

Theorem (Разборов, 1990)

Для любого двудольного графа имеем $L_{\mathcal{B}}(G) \geqslant \mathrm{adim}_{\mathbb{F}}(G)$.

Theorem (Pudlák, Rödl, 1992)

Если булева функция f от $2n$ переменных вычислима программой с ветвлением размера S, то $\mathrm{pdim}_{\mathbb{F}}(G_f) \leqslant S + 2$.

Програмы с ветвлением (рисуем картинку!) по силе между булевыми формулами и булевыми схемами.

Theorem (Разборов, 1990)

Для любого двудольного графа имеем $L_{\mathcal{B}}(G) \geqslant \mathrm{adim}_{\mathbb{F}}(G)$.

Используя оценку Warren-а (см. лекцию 2), можно показать, что существуют графы с $\mathrm{pdim}_{\mathbb{R}}(G) \geqslant c\sqrt{n/\log n}$.

Связь сложность графа и аппроксимативного ранга

В ряде случаев можно показать, что матрица инцидентности двудольного графа малой сложности имеет низкий аппроксимативный ранг. Рассмотрим пример.

Связь сложность графа и аппроксимативного ранга

В ряде случаев можно показать, что матрица инцидентности двудольного графа малой сложности имеет низкий аппроксимативный ранг. Рассмотрим пример.

Утверждение

Предположим, двудольный $N \times N$ граф G имеет вид

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i, \quad A_i \subset X,\ B_i \subset Y.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдётся матрица $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$, такая что

- *для всех $(x, y) \in X \times Y$ имеем $|G(x, y) - M(x, y)| \leqslant \varepsilon$,*
- $\operatorname{rank} M \leqslant \exp(C\sqrt{n} \log(2/\varepsilon) \log n)$.

Связь сложность графа и аппроксимативного ранга

В ряде случаев можно показать, что матрица инцидентности двудольного графа малой сложности имеет низкий аппроксимативный ранг. Рассмотрим пример.

Утверждение

Предположим, двудольный $N \times N$ граф G имеет вид

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i, \quad A_i \subset X, \ B_i \subset Y.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдётся матрица $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$, такая что

- *для всех $(x, y) \in X \times Y$ имеем $|G(x, y) - M(x, y)| \leqslant \varepsilon$,*
- $\operatorname{rank} M \leqslant \exp(C\sqrt{n} \log(2/\varepsilon) \log n)$.

Мы отождествляем граф G с его матрицей. Пусть $G_i = A_i \times B_i$. Ясно, что $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ и $\operatorname{rank} G_i = 1$. Для получения из G матрицы M нужно аппроксимировать функцию $y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n$.

Аппроксимация дизъюнкции

Для $x \in \{0,1\}^n$ обозначим через $\mathrm{OR}(x)$ функцию $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$.

Утверждение (в качестве упражнения)

Для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдётся вещественный многочлен p от n булевых переменных степени не выше $Cn^{1/2} \log(2/\varepsilon)$, такой что для всех $x \in \{0,1\}^n$, $|p(x) - \mathrm{OR}(x)| \leqslant \varepsilon$.

Аппроксимация булевых функций многочленами — отдельная важная тема. Для $f\colon \{0,1\}^n$ через $\deg_\varepsilon(f)$ обозначим минимальную степень полинома $p(x_1, \ldots, x_n)$, аппроксимирующего f с точностью ε: $\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Аппроксимация дизъюнкции

Для $x \in \{0,1\}^n$ обозначим через $\mathrm{OR}(x)$ функцию $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$.

Утверждение (в качестве упражнения)

Для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдётся вещественный многочлен p от n булевых переменных степени не выше $Cn^{1/2}\log(2/\varepsilon)$, такой что для всех $x \in \{0,1\}^n$, $|p(x) - \mathrm{OR}(x)| \leqslant \varepsilon$.

Аппроксимация булевых функций многочленами — отдельная важная тема. Для $f\colon \{0,1\}^n$ через $\deg_\varepsilon(f)$ обозначим минимальную степень полинома $p(x_1, \ldots, x_n)$, аппроксимирующего f с точностью ε:
$\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Определение $\deg_\varepsilon(f)$ вполне аналогично определению ε-ранга матрицы. Более того, есть и прямая связь. Скажем, если f — булева функция от $2n$ переменных, $d = \deg_\varepsilon(f)$, то матрица $M(x,y) = f(x,y)$, $x, y \in \{0,1\}^n$, приближается матрицей $p(x,y)$, $\deg p \leqslant d$. Отсюда

$$\mathrm{rank}_\varepsilon(M) \leqslant \sum_{k=0}^{d} \binom{2n}{k}.$$

Вернёмся к доказательству утверждения про $G = \cup A_i \times B_i$. Имеем $G = \cup G_i$, или $f_G = f_{G_1} \vee f_{G_2} \vee \ldots \vee f_{G_n}$ в терминах функций.

Вернёмся к доказательству утверждения про $G = \cup A_i \times B_i$. Имеем $G = \cup G_i$, или $f_G = f_{G_1} \vee f_{G_2} \vee \ldots \vee f_{G_n}$ в терминах функций.

Пусть полином p аппроксимирует $\mathrm{OR}(y_1, \ldots, y_n)$ с погрешностью ε, $\deg p \ll n^{1/2} \log(2/\varepsilon)$.

Вернёмся к доказательству утверждения про $G = \cup A_i \times B_i$. Имеем $G = \cup G_i$, или $f_G = f_{G_1} \vee f_{G_2} \vee \ldots \vee f_{G_n}$ в терминах функций.

Пусть полином p аппроксимирует $\mathrm{OR}(y_1, \ldots, y_n)$ с погрешностью ε, $\deg p \ll n^{1/2} \log(2/\varepsilon)$.

Подставим в p вместо y_i матрицу G_i, заменяя произведение на поэлементное умножение, т.е. $y_i y_j$ заменяется на $G_i \circ G_j$. Если матрицы A и B имеют ранг 1, то и $\mathrm{rank}(A \circ B) = 1$. Следовательно, вместо монома $y_{i_1} \cdots y_{i_s}$ возникнет матрица $G_{i_1} \circ \cdots \circ G_{i_s}$ ранга 1.

Вернёмся к доказательству утверждения про $G = \cup A_i \times B_i$. Имеем $G = \cup G_i$, или $f_G = f_{G_1} \vee f_{G_2} \vee \ldots \vee f_{G_n}$ в терминах функций.

Пусть полином p аппроксимирует $\mathrm{OR}(y_1, \ldots, y_n)$ с погрешностью ε, $\deg p \ll n^{1/2} \log(2/\varepsilon)$.

Подставим в p вместо y_i матрицу G_i, заменяя произведение на поэлементное умножение, т.е. $y_i y_j$ заменяется на $G_i \circ G_j$. Если матрицы A и B имеют ранг 1, то и $\mathrm{rank}(A \circ B) = 1$. Следовательно, вместо монома $y_{i_1} \cdots y_{i_s}$ возникнет матрица $G_{i_1} \circ \cdots \circ G_{i_s}$ ранга 1.

Положим $M = p(G_1, \ldots, G_n)$. Из вышесказанного следует, что $\|M - G\|_\infty \leqslant \varepsilon$ и

$$\mathrm{rank}\, M \leqslant \sum_{j=0}^{\deg p} \binom{n}{j} \leqslant (en/\deg p)^{\deg p}.$$

P. Pudlák, V. Rödl, “A combinatorial approach to complexity”, *Combinatorica*, 1992.